

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

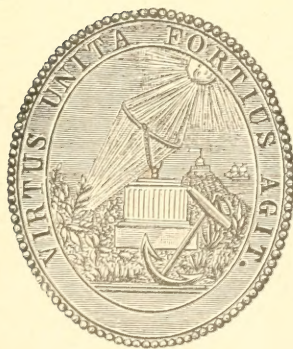
PUBLICADOS SOB A DIRECÇÃO

DE

F. Gomes Teixeira

VOLUME III

(Publicação official)



COIMBRA

IMPRESSA DA UNIVERSIDADE

1908

119065-
10/10/11



SURFACES NAUTILOÏDES

PAR

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Membre de l'Institut
Inspecteur général des Mines
Grand-Officier de la Légion-d'Honneur

INTRODUCTION

On a souvent l'occasion de saisir dans la nature un reflet des formes rigoureuses qu'étudie la géométrie. Sans insister sur la cristallographie qui en est la plus frappante manifestation, mais qui relève uniquement des forces physiques et chimiques, nous en trouvons dans les corps vivants plus d'un exemple.

La botanique nous présente des végétaux dont la frondaison dessine une sphère parfaite. Des cônes de révolution circonscrivent exactement le feuillage de divers arbres, ou en modèlent le tronc avec une grande précision. La loi de l'insertion des feuilles sur la tige accuse l'influence de l'hélice, dont le pandanus nous présente les spirales elles-mêmes dans leur continuité.

Le règne animal de son côté a reçu du créateur certaines empreintes géométriques. On y remarque chez les zoophytes la division pentagonale, la moins simple précisément de celles des études élémentaires. Les zoologistes ont signalé dans le nautilus, dans l'ammonite le caractère de l'une des lignes planes les plus remarquables, la spirale logarithmique. Le cérite, l'hélix dessinent des courbes gauches d'une frappante régularité.

Il m'a semblé intéressant d'appliquer les ressources de l'analyse géométrique à l'étude de la plus élégante de ces surfaces, en lui conservant pour plus de simplicité le nom qui lui appartient dans l'histoire naturelle: le *nautilé*. Mais il est arrivé qu'au cours de cette étude, elle s'est élargie d'elle-même, et m'a entraîné à des développements plus étendus. Pour l'exposer ici dans son ensemble, il sera plus simple de procéder du général au particulier.

PREMIERE PARTIE

Surfaces à front générateur

§ I

Préliminaires

1. Nous emploierons concurremment les coordonnées rectangulaires: abscisse x , ordonnée y , altitude z ; et les coordonnées *mixtes*: rayon vecteur *horizontal* ⁽¹⁾

$$R = \sqrt{x^2 + y^2},$$

longitude

$$\omega = \text{arc tang } \frac{y}{x},$$

comptée à partir du premier méridien ZOX, autour de l'axe *zénithal* OZ, enfin la latitude

$$\lambda = \text{arc tang } \frac{z}{R},$$

rapportée au plan de l'équateur XOY.

On a d'ailleurs inversement

$$x = R \cos \omega, \quad y = R \sin \omega, \quad z = R \text{ tang } \lambda.$$

(1) Nous désignerons par ρ le rayon vecteur de l'espace

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. L'objet essentiel de ces recherches concerne les *surfaces à front générateur*, que nous constituerons de la manière suivante.

Nous nous donnons dans le plan de l'équateur (fig. 1) une courbe *directrice*

$$r = F(\theta).$$

Je désigne par r, θ les coordonnées polaires planes de son point décrivant M , afin de prévenir toute confusion avec celles R, ω, λ des points N de la surface.

Par le point décrivant je mène, perpendiculairement à l'équateur, un plan qui prendra le nom de *front générateur*.

Il est indiqué par sa trace FF' , autour de laquelle nous le rabattons pour montrer,

en trait pointillé, la courbe *génératrice* FNF' . Nous la représenterons par l'équation

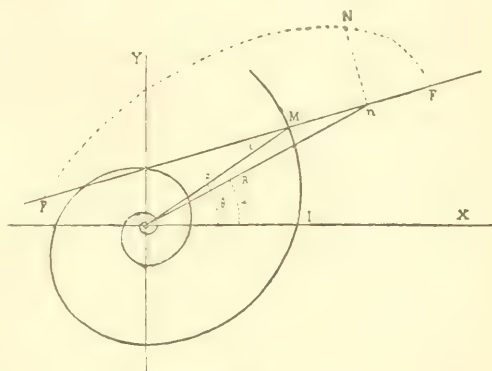


Fig. 1

$$\xi = f(z),$$

entre son abscisse $\xi = Mn$ et son ordonnée $z = Nn$, rapportées au point décrivant comme origine, à l'aide des axes MF dans l'équateur et MZ' parallèle à l'axe zénithal.

La condition fondamentale qui dominera toute cette théorie est que, *pendant le mouvement du plan de front la génératrice reste semblable à elle-même par rapport au point décrivant*. Le rapport de similitude, arbitraire comme tous les autres éléments de la question, sera représenté par la fonction

$$\varphi(\theta).$$

L'équation de cette génératrice, à chaque instant de sa déformation progressive, prendra donc la forme

$$(1) \quad \frac{\xi}{\varphi(\theta)} = f\left[\frac{z}{\varphi(\theta)}\right].$$

Enfin un quatrième élément détermine à tout instant la position de la trace du front par rapport au rayon vecteur de la directrice, à savoir l'angle de ces deux droites

$$i = \psi(\theta).$$

La surface à front générateur se trouve ainsi constituée à l'aide de quatre éléments fonctionnels arbitraires, que nous représenterons d'une manière abrégée par F, f, φ, ψ , en y sous-entendant la variable, lors qu'elle sera suffisamment désignée.

Etablissons d'abord deux formules fondamentales.

3. La première présente ce caractère spécial de rester indépendante de la fonction f , c'est à-dire de la génératrice. C'est l'équation de la trace FF' du plan de front, sur laquelle en effet se projette indifféremment tout ce que renferme ce plan.

Nous avons dans le triangle OMn

$$\frac{On}{\sin OMn} = \frac{OM}{\sin . OnM}, \quad \frac{R}{\sin i} = \frac{r}{\sin [i - (\theta - \omega)]},$$

et enfin

$$(2) \quad R \sin (\omega - \theta + i) = r \sin i = F \sin \psi.$$

4. Ce triangle nous donne également

$$\overline{On}^2 = \overline{OM}^2 - 2OM . \overline{Mn} . \cos OMn + \overline{Mn}^2,$$

c'est-à-dire (1)

$$(3) \quad R^2 = F^2 + 2F\varphi f \left(\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi} \right) \cos \psi + \varphi^2 f^2 \left(\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi} \right).$$

Pour obtenir, entre R, ω, λ l'équation de la surface à front générateur, il suffira d'éliminer entre les relations (2) et (3) le paramètre θ , lorsque seront spécifiés dans chaque cas les symboles F, f, φ, ψ .

5. La question posée dans ces termes comporte une grande généralité.

En ce qui concerne en premier lieu le front, on peut supposer: 1° qu'il dépende uniquement de la directrice; par exemple en faisant avec sa tangente un angle constant (lequel sera

droit pour les *surfaces à front normal*; 2° ou qu'il ne dépende au contraire que du rayon vecteur; en exécutant par exemple autour de M une rotation proportionnelle à celle que ce rayon effectue autour du pôle. Si le coefficient de cette proportionnalité est -1 , le front reste parallèle à lui-même (1); pour la valeur $+1$, il fait avec ce rayon un angle constant (en particulier un angle nul dans les *surfaces à front méridien*); si l'on a le coefficient $+2$, le front et l'axe polaire constituent à chaque instant avec le rayon vecteur un triangle isocèle, etc.; 3° ou enfin le front dépend à la fois du rayon et de la directrice; par exemple en se disposant suivant l'une des bissectrices de leur angle, ou en tournant sur lui-même proportionnellement à la déviation qu'éprouve cette droite, etc.

Quant à la génératrice, son choix reste illimité. L'on peut penser à la vérité que le cercle fournira pour les arts de la décoration la meilleure ressource; soit qu'il ait son centre au point décrivant ou qu'il constitue un excentrique; en lui attribuant une position déterminée ou gyratoire. Toutefois diverses autres courbes peuvent être envisagées, au point de vue de l'art, aussi bien que des facilités du calcul.

Mais c'est assurément le choix de la directrice qui imprimera le caractère le plus accentué aux diverses familles de surfaces ainsi constituées. Supposons la par exemple rectiligne et le front parallèle à lui-même, en adoptant comme paramètre de similitude la longueur parcourue par lui suivant cette directrice à partir d'un de ses points; nous aurons ainsi le groupe des cônes, et à la limite celui des cylindres. Mais on pourrait en obtenir de différents avec la ligne droite, en modifiant les autres conditions.

Si on lui substitue le cercle en plaçant son centre au pôle, avec un front normal et une génératrice invariable ($\varphi = 1$), nous retrouvons les surfaces de révolution. Mais le cercle peut aussi fournir d'autres familles avec des lois différentes.

Nous donnerons dans la suite de cette étude une prépondérance toute spéciale comme directrice à la *spirale logarithmique*; et c'est de ce choix que nous ferons sortir le groupe des *surfaces nautiloïdes* qui semblera peut être, par l'importance de ses propriétés, mériter de prendre place dans la science.

(1) Lorsque le front reste parallèle à lui-même, on peut, en désignant par α la constante $h = i$ qui mesure son inclinaison sur l'axe polaire, donner à la relation (3) la forme suivante

$$(F + f + R)(F + f - R)(F - f + R)(-F - f + R) = |2fR \sin(\omega - \alpha)|^2.$$

§ II

Les quatre types simples

6. Attachons nous tout d'abord à dégager pour chacun des quatre éléments fonctionnels F , f , φ , ψ , l'hypothèse la plus simple qui lui soit propre.

En ce qui concerne en premier lieu l'inclinaison du front sur le rayon vecteur, cette condition sera évidemment

$$\psi = 0,$$

et confondra incessamment ce plan avec celui du méridien, c'est-à-dire sa trace avec le rayon vecteur de la directrice. Nous conservons d'ailleurs une entière généralité pour les trois autres fonctions F , f , φ .

Il est facile d'établir l'équation de ces surfaces à front méridien. Les relations (3), (1), (2) deviennent en effet

$$\begin{aligned} \cos i &= 1, \\ (4) \quad R^2 &= F^2 + 2F\xi + \xi^2 = (F + \xi)^2, \\ R &= F + f\left(\frac{z}{\varphi}\right), \\ \omega &= 0. \end{aligned}$$

La longitude ω d'un point quelconque N (fig. 2) de la génératrice méridienne peut ainsi être substituée, sous les signes fonctionnels, à l'azimut θ du point décrivant M , et il vient pour l'équation cherchée

$$(5) \quad R = F(\omega) + \varphi(\omega) f\left[\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi(\omega)}\right].$$

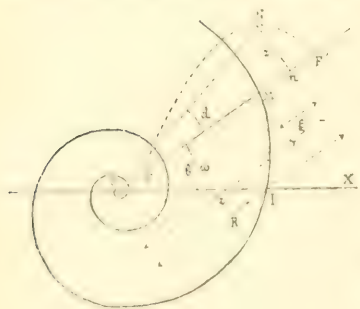


Fig. 2

J'ai préféré la déduire de nos formules fondamentales, afin d'en montrer de suite l'usage, mais il est facile de la lire directement sur la figure 2.

7. En ce qui concerne en second lieu le rapport de similitude, le paramètre de beaucoup le plus utile sera le rayon ve-

cteur lui même

$$\varphi = r = F.$$

La génératrice variable est alors représentée (1) par l'équation

$$(6) \quad \xi = F \cdot f\left(\frac{\xi}{F}\right).$$

Nous appellerons de telles surfaces *vectorielles*, quelles que soient d'ailleurs les fonctions F, f, ψ .

8. Adjoignons à la condition vectorielle celle de l'inclinaison constante du front sur le rayon vecteur

$$\psi = \text{const.}$$

Les surfaces ainsi constituées, quelles que soient F et f (c'est-à-dire la génératrice et la directrice) jouissent d'une importante propriété.

Le triangle OMn (fig. 1) conserve en effet pendant le mouvement générateur du point N sur sa trajectoire de l'espace, un angle invariable $\pi - i$ compris entre deux cotés proportionnels r et ξ . Il reste donc semblable à lui-même. Dès lors On sera proportionnel à Mn , et par suite à Nn . En même temps ce rayon vecteur On fait avec OM un angle invariable qui est la différence de i et de MON . Le point n décrit donc une courbe semblable à la directrice. D'autre part enfin l'angle *vertical* NON , qui n'est autre que la latitude λ du point N , reste lui même constant durant le mouvement. De là ce théorème:

Si l'on coupe par un *cône de latitude*

$$\lambda = \text{const.},$$

une surface *vectorielle d'inclinaison frontale constante* la courbe gauche d'intersection (N) conserve une projection équatoriale (n) semblable à la directrice (M), quelles que soient cette dernière aussi bien que la génératrice.

Le plan de l'équateur se trouve d'après cela *silloné* de telles lignes pour les divers points N qui constituent le profil générateur. Imaginons dès lors que l'on fasse varier d'une manière continue le cône de latitude, depuis un angle infinitésimal autour de l'axe zénithal jusqu'à son épanouissement complet dans l'équateur, suivi lui-même d'un repliement en dessous jusqu'à l'axe nadiral. On verra, en suivant par la pensée le déplace-

ment corrélatif de l'intersection (N) sur la surface, la courbe plane (n) balayer le plan de l'équateur en restant semblable à elle-même, puis qu'elle doit toujours l'être à la directrice.

Bien entendu, selon la composition de la génératrice, sa rencontre avec le cône de latitude peut s'opérer en un nombre multiple de points, dont quelques uns peuvent devenir accidentellement des points de tangence. Il y aura donc en général plusieurs courbes semblables balayant à la fois diverses zones de l'équateur, en s'éloignant ou se rapprochant les unes des autres, pour arriver à se fondre ensemble à l'instant d'un contact.

9. En ce qui concerne en troisième lieu la génératrice, le choix le plus simple sous le rapport géométrique, en même temps que le plus rapproché des vues qui nous dirigent en histoire naturelle vers le genre *Nautilus*, de la famille des *Nautilidés*, est celui d'un cercle dont le centre parcourrait la directrice quelconque F.

Supposons en même temps la surface vectorielle. L'équation de la circonférence variable devient alors à chaque instant

$$\xi^2 + z^2 = B^2 r^2, \quad \xi = \sqrt{B^2 r^2 - z^2},$$

en désignant par B le multiple constant du rayon vecteur de la directrice qui fournit le rayon de courbure de la génératrice circulaire.

Admettons enfin, en ce qui concerne l'inclinaison frontale, la loi du front méridien. L'équation (5) de cette classe de surfaces devient dans ce cas

$$R = r \pm \sqrt{B^2 r^2 - R^2 \tan^2 \lambda},$$

entre les coordonnées R, ω , λ , une fois que l'on a remplacé r par F(ω). Elle subit les transformations suivantes

$$(R - r)^2 = B^2 r^2 - R^2 \tan^2 \lambda,$$

$$R^2 (1 + \tan^2 \lambda) - 2Rr + r^2 (1 - B^2) = 0,$$

$$\left(\frac{R}{\cos \lambda} \right)^2 - 2r \cos \lambda \left(\frac{R}{\cos \lambda} \right) + r^2 (1 - B^2) = 0,$$

$$\frac{R}{\cos \lambda} = r \cos \lambda \pm \sqrt{r^2 \cos^2 \lambda + (B^2 - 1) r^2},$$

$$(7) \quad R = F(\omega) \cos \lambda (\cos \lambda \pm \sqrt{B^2 - \sin^2 \lambda}).$$

Cette formule vérifie avec évidence le théorème du N° 9 relatif aux surfaces vectorielles d'inclinaison frontale constante, d'après lequel, pour une latitude fixe, la projection horizontale reste semblable à la directrice: $R = F(\omega)$.

10. La surface ainsi constituée est symétrique par rapport à l'équateur, puisque son équation ne dépend que de $\cos \lambda$ et $\sin^2 \lambda$. Contentons nous donc de raisonner sur la moitié supérieure, en faisant varier λ seulement de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Son sinus restant positif, la condition de réalité du radical se réduit à

$$\sin \lambda < B.$$

Si $B > 1$, (le cercle générateur recouvrant alors le pôle comme une voûte), cette inégalité ne limitera en rien la variation de λ dans toute l'étendue de l'angle droit.

Le cas-limite $B = 1$ prendra une grande importance dans la suite de ces recherches. Nous désignerons sous le nom d'*équiradiales* les surfaces qui lui correspondent.

Mais supposons au contraire $B < 1$, (le profil circulaire restant alors entièrement situé d'un même côté du pôle), nous poserons pour simplifier les calculs

$$B = \sin b.$$

Dans ce cas, l'on n'obtiendra d'intersection du cône de révolution avec la surface qu'en dessous de la latitude

$$\sin \lambda_0 = B, \quad \lambda_0 = b.$$

A cette limite même, l'équation (7) de la surface nous donne

$$R = r \cos^2 \lambda_0 = F(\omega) \cos^2 b.$$

Au dessous, l'intersection se développe suivant deux branches distinctes, qui vont en s'écartant l'une de l'autre jusqu'à ce qu'elles forment les deux parties de la trace équatoriale, pour les valeurs

$$\lambda_1 = 0, \quad R = r(1 \pm B) = (1 \pm \sin b) F(\omega).$$

11. En ce qui concerne en quatrième lieu la directrice, nous

fixerons notre attention d'une manière toute spéciale sur la spirale logarithmique.

Nous prendrons son équation sous la forme

$$r = e^{A\theta} = e^{\theta \cot a},$$

en désignant par a l'inclinaison constante de sa tangente sur le rayon vecteur, et prenant comme unité la longueur OI interceptée par la courbe sur l'axe polaire, pour l'azimut $\theta = 0$.

Si nous supposons dans ce cas la surface vectorielle et d'inclinaison frontale constante, elle prendra pour nous *sous cette triple condition* le nom de *surface nautiloïde*, quelle que soit sa génératrice f . De là une famille de surfaces bien définie.

La proposition du N° 9 leur convient, et se précise même alors encore plus. En effet les courbes semblables à la spirale logarithmique

$$r = ce^{A\theta} = e^{A(\theta + \log c \tan a)},$$

sont des spirales égales mais déviées de l'angle $\log c \tan a$ autour du pôle ⁽¹⁾. Si nous fondons d'ailleurs cette déviation dans la gyration qui a été envisagée au N° 9, c'est alors la directrice *elle-même* que l'on voit entrer en mouvement pour balayer l'équateur sans changer de forme (en se dédoublant au besoin de différentes façons pour des intersections multiples, avec des rotations de divers sens pour ses diverses individualités) au fur et à mesure que le cône de latitude varie du zénith au nadir en passant par l'équateur.

12. Ces lignes de latitude jouissent dans les nautiloïdes d'une propriété très remarquable.

L'ordonnée du point déterminé par cette latitude constante reste par cela seul sa propre homologue sur les génératrices semblables dans toutes leurs situations. Elle sera donc proportionnelle au rayon vecteur du point décrivant de la directrice, ce qui donne

$$z = Cr = Ce^{A\theta}.$$

On a d'après cela tout à la fois

$$dr = Ae^{A\theta} d\theta, \quad dz = ACe^{A\theta} d\theta,$$

(1) Tous les logarithmes qui figurent dans ce mémoire sont pris dans le système népérien.

et il vient pour l'inclinaison j de cette courbe sur l'horizon :

$$\text{tang } j = \frac{dz}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = \frac{AC}{\sqrt{A^2 + 1}} = C \cos a ,$$

valeur constante.

D'après la similitude que conserve incessamment la figure formée par la tangente, l'équateur, le cône, sa génératrice et son plan tangent, il en sera de même de l'angle que comprennent entre elles la tangente et la génératrice du cône. Cette ligne gauche serpente donc sur le cône de révolution en traversant sous un même angle toutes ses arêtes.

On reconnaît à ce caractère la courbe qui a été étudiée par TISSOT (*Nouvelles annales de mathématiques*, 1852), PAUL. SERRET (*Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, 1860, page 101), G. PIRONDI (*Journal für Mathematik*, Berlin, tome CXVIII, page 61), F. GOMES TEIXEIRA (*Tratado de las curvas especiales notables*, Madrid, 1905, page 566). Le second de ces géomètres lui a donné le nom d'*hélice cylindro-conique*. Cette dénomination serait un peu longue pour le très fréquent usage que nous aurons à en faire. Je lui substituerai pour ce motif l'abréviation: *cônhélice*.

Remarquons avec soin que, si toutes les cônhélices sont des *lignes d'égale pente* du nautiloïde, toutes les lignes d'égale pente de ces surfaces ne sont pas des cônhélices. Il suffit d'en donner cette raison évidente qu'il y a en chaque point une seule de ces dernières, déterminée par son cône de latitude, tandis qu'il part de ce point une infinité de lignes d'égale pente sous toutes sortes d'inclinaisons.

§ III

Nautilé à front méridien

13. Réunissons actuellement ensemble les quatre conditions simples qui viennent d'être étudiées distinctement, à savoir: la génératrice circulaire, la directrice spirale, le rapport vectoriel et le front méridien. Nous constituons ainsi un premier type bien déterminé, en vue de l'assimilation que nous cherchons avec la nature vivante. Nous lui donnerons le nom de *nautilé à front méridien*.

Son l'équation sera (7)

$$R = e^{A\omega} \cos k (\cos k \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 k}) .$$

Elle met bien en évidence la nature des lignes de latitude. Si l'on emploie en effet l'abréviation

$$\delta = \text{tang } a \text{ Log } [\cos \lambda (\cos \lambda \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 \lambda})],$$

cette formule devient simplement

$$R = e^{A(\omega + \delta)},$$

et représente en projection équatoriale, pour une latitude constante, une spirale logarithmique égale à la directrice, et déviée de l'angle δ .

Pour la valeur limite $\lambda_0 = b$, le double signe disparaît; on obtient alors la projection de la ligne de contact du nautile avec le cône qui lui est circonscrit à partir du pôle. Elle a pour déviation

$$\delta_0 = 2 \text{tang } a \text{ Log } \cos b.$$

Celles des deux traces équatoriales (pour $\lambda_1 = 0$) sont de même

$$\delta_1 = \frac{\text{Log } (1 \pm B)}{A}.$$

14. Nous avons établi (N° 10) une première distinction selon que $B \geq 1$, c'est-à-dire que le cercle générateur recouvre ou non le pôle. Une seconde division devient ici nécessaire. En effet cette circonférence peut être, ou non, rencontrée par la nouvelle position qu'elle prend à son retour dans le même méridien pour engendrer la spire suivante. Par cela seul, le même cercle initial coupe de même la circonférence de la révolution précédente, en raison de la similitude permanente du groupe formé par deux méridiennes successives.

Si les cercles consécutifs restent nettement séparés par des intervalles vides, la surface se développe en une seule nappe de forme spiraloïde, évasée transversalement en forme de cor comme dans le genre *criocéras*. C'est le cas le plus simple, et il est facile de formuler sa condition d'existence.

Les rayons vecteurs du point décrivant, pour deux révolutions successives de la directrice, sont $e^{A\theta}$ et $e^{A(\theta + 2\pi)}$. Leur différence, c'est-à-dire l'intervalle de ces spires, a donc pour valeur

$$e^{A\theta} (e^{2\pi A} - 1).$$

Quant aux rayons correspondants des cercles générateurs, on les obtient en multipliant par B ces deux rayons vecteurs. Leur somme sera d'après cela

$$Be^{A\theta}(e^{2\pi A} + 1).$$

Pour que les spires de la surface restent distinctes sans empiéter l'une sur l'autre, il faut que cette somme n'occupe pas la totalité de l'intervalle ci-dessus, c'est-à-dire que

$$B < \frac{e^{2\pi A} - 1}{e^{2\pi A} + 1}.$$

C'est donc par l'unité d'une part (N° 10) et par cette fonction que se trouvent séparées, pour une valeur donnée de A, les trois classes distinctes de nautila à front méridien.

15. Mais le cas des intersections présente une tout autre complexité. Etudions le avec quelque détail.

Nous emploierons comme coordonnées de la section méridienne dans son propre plan R et z. Le centre du cercle générateur ayant pour abscisse r, et son rayon étant Br, il aura comme équation

$$\begin{aligned} (8) \quad & (R - r)^2 + z^2 = B^2 r^2, \\ & R^2 - 2rR + z^2 = (B^2 - 1)r^2, \\ & 2rR - R^2 - z^2 = r^2 \cos^2 b. \end{aligned}$$

La circonférence qui lui succède, non pas immédiatement mais à n spires de distance, nous donnerait de même

$$2r'R - R^2 - z^2 = r'^2 \cos^2 b.$$

En retranchant ces deux relations, nous trouvons pour l'abscisse R de l'intersection

$$\begin{aligned} 2(r' - r)R &= (r'^2 - r^2) \cos^2 b, \\ R &= \frac{r + r'}{2} \cos^2 b. \end{aligned}$$

Or on a

$$r' = e^{A(n + 2n\pi)} = re^{2nA\pi},$$

et par conséquent

$$(9) \quad R = \frac{1 + e^{2nA\pi}}{2} \cos^2 b \cdot e^{A\omega}.$$

16. Si l'on envisage R et ω comme des coordonnées polaires, on obtient l'équation de la projection équatoriale de la trajectoire du point d'intersection, à savoir

$$R = e^{A(\omega + \Delta)},$$

en posant pour abréger

$$\Delta = \text{tang } a \text{ Log } \left(\frac{e^{2nA\pi} + 1}{2} \cos^2 b \right).$$

On y retrouve donc la spirale directrice elle-même déviée de l'angle Δ . Les courbes gauches qui lui correspondent pour les diverses valeurs de n seront certaines cônhélices spéciales du nautilé.

Nous les appellerons *gouttières*. Cette dénomination se présente d'elle-même à l'esprit pour celles d'entre elles dont les parois latérales plongent toutes les deux vers le bas, figurant une vallée dont la cônhélice formerait le *thalweg*.

Si l'on engageait sur cette ligne une bille infinitésimale descendant sous l'action de la pesanteur sans aucune résistance passive, elle obéirait, d'après le théorème des forces vives, à la loi de mouvement connue sous le nom de *plan incliné*; laquelle n'est autre que celle de la chute libre des graves avec réduction de l'accélération d'après le sinus de la pente.

17. Cherchons d'autre part l'ordonnée z du point d'intersection. L'équation (8) nous donne à cet égard

$$\left(\frac{z}{R} \right)^2 = -1 + \frac{r}{R} \left(2 - \frac{r}{R} \cos^2 b \right),$$

c'est-à-dire (9)

$$\text{tang}^2 k = -1 + \frac{2}{(1 + e^{2nA\pi}) \cos^2 b} \left(2 - \frac{2}{1 + e^{2nA\pi}} \right),$$

$$1 + \text{tang}^2 k = \frac{4e^{2nA\pi}}{(1 + e^{2nA\pi})^2 \cos^2 b},$$

$$(10) \quad \cos k = \frac{e^{nA\pi} + e^{-nA\pi}}{2} \cos b.$$

Cette valeur de $\cos \lambda$, bien qu'obtenue par l'extraction d'une racine carrée, ne comporte pas de double signe, attendu que l'angle de latitude ne se compte que de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Mais on voit qu'à chacune des valeurs positives de ce cosinus correspondent, d'après la symétrie de la formule, deux valeurs égales et de signes contraires de n . Il y a donc autant de circonférences à droite qu'à gauche du cercle central, duquel nous sommes partis, qui sont rencontrées par lui. Et en effet, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, il ressort de la similitude permanente que cette circonférence joue par rapport aux cercles moindres qu'elle situés sur sa gauche le même rôle qu'exercent à son égard les cercles plus grands qui se trouvent à sa droite.

On voit en outre que pour chaque valeur positive de $\cos \lambda$, la latitude est susceptible de deux valeurs égales et de signes contraires; conséquence immédiate d'ailleurs de la symétrie de la surface au dessus et au dessous de l'équateur.

18. Toutefois ces valeurs ne seront réelles que sous la condition

$$\cos \lambda < 1 ,$$

d'où l'on déduit (10)

$$(11) \quad e^{2nA\pi} - \frac{2}{\cos b} e^{nA\pi} + 1 < 0 .$$

Pour que ce trinôme soit négatif, il faut que sa variable $e^{nA\pi}$ reste comprise entre les deux racines, qui sont

$$\frac{1 \pm \sin b}{\cos b} ,$$

ou sous des formes équivalentes

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} \right) , \quad \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} \right) .$$

Ces valeurs sont réciproques l'une de l'autre. Leurs logarithmes (qui devront comprendre entre eux $nA\pi$) sont donc égaux et de signes contraires. Par conséquent n ne doit pas

excéder les deux limites

$$\pm \frac{1}{Az} \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} \right).$$

Il est facile de concevoir a priori qu'il doive y avoir, de part et d'autre, une limite pour les intersections ⁽¹⁾. Lorsque, en effet, à partir d'une position déterminée, le cercle s'éloigne de plus en plus par des rotations successives, encore bien que son diamètre augmente avec le rayon vecteur de son centre de manière à le recouvrir vers son extrémité sur des longueurs indéfiniment croissantes, il laisse cependant à découvert du côté du pôle un segment qui varie lui-même proportionnellement, en arrivant ainsi à dépasser toute limite, et en particulier le rayon de la circonférence fixe sur laquelle portent nos raisonnements. A partir de ce moment, il n'y aura plus rencontre.

19. Appelons N le plus grand nombre entier qui satisfasse à la condition numérique

$$(12) \quad N < \frac{\operatorname{tang} a}{\pi} \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} \right),$$

le cercle considéré en rencontrera en tout $2N$ autres, à savoir N plus grands sur sa droite, et N moindres à gauche.

Si l'on voulait accroître la valeur de ce total, et avec lui la complication de la surface, il suffirait d'augmenter a et b , c'est-à-dire, d'employer des spirales plus lentes et des cercles plus grands par rapport au rayon vecteur de leur centre.

A ces points d'intersection des circonférences méridiennes correspondent $2N$ gouttières, à savoir N au dessus de l'équateur, et N au dessous. Il existe cependant $4N$ intersections du cercle central par ses $2N$ *satellites*, mais elles se trouvent associées deux par deux sur la même droite de latitude, qui coupe nécessairement deux fois chaque cercle. Elles sont dès lors traversées toutes les deux par la même conhélice. Elle rencontre une première fois le cercle central sur sa gauche en son croisement avec un plus petit que lui, puis une seconde fois, en

(¹) Sauf lorsqu'on arrive à la limite jusqu'au nautile équiradial : $B = 1$, $b = \frac{\pi}{2}$.

raison de la similitude, sur sa droite, lorsqu'il joue lui-même le rôle de petit cercle vis à vis d'un plus grand que lui.

Le nombre des gouttières est donc toujours pair. Il existe cependant à cet égard une exception qu'il faut enregistrer. Supposons en effet que l'expression (12) ait précisément pour valeur un nombre entier. On peut alors attribuer à n cette valeur limite elle-même, en outre de tous les nombres entiers inférieurs. Mais c'est toutefois à la condition d'annuler par ce choix spécial le trinôme (11), au lieu de le rendre négatif. On a donc dans ce cas

$$\cos \lambda = 1, \quad \lambda = 0.$$

Le rencontre des cercles se fait par conséquent sur l'axe polaire, et ils y sont tangents l'un à l'autre. Au point de vue algébrique on peut assurément voir là une *solution double*, et maintenir par cet artifice le nombre $2N$ des gouttières. Mais, dans la réalité physique, on n'en aperçoit plus sur la surface que $2N-1$ seulement, à savoir $N-1$ cônhélices au dessus de l'équateur, autant en dessous, et une spirale logarithmique qui serpente dans le plan même de symétrie, où elle forme une ligne de *soudure* des spires consécutives entre elles.

Le cas spécial $N=1$ marque à cet égard le passage de la seconde catégorie (N^0 15) à celle des intersections. La relation (14) devient alors

$$\tan a \cdot \text{Log} \left(\frac{\pi}{1} - \frac{b}{2} \right) = \pi,$$

$$B = \sin b = \cos (2e^{A\pi}).$$

On rencontrera donc un tel nautile *soudé* pour une spirale quelconque, en employant un rapport vectoriel approprié, ou pour un rapport arbitraire avec une spirale convenable.

20. Rentrant maintenant dans le cas général, nous voyons que ces diverses cônhélices séparent la surface nautilienne en $2N$ zones, infinies suivant le sens spiraloïde, mais se cloisonnant mutuellement dans la coupe transversale, à la manière des bulles de savon ⁽¹⁾.

(1) Le résultat changerait à la vérité, s'il s'agissait d'un objet massif dont on n'aperçoit pas l'intérieur, tel qu'un modèle en plâtre. Il n'y a plus alors, de chaque côté de l'équateur, qu'une seule gouttière accessible, serpentant à la superficie du solide.

Nous pouvons entreprendre d'évaluer le nombre des compartiments distincts suivant lesquels se trouve cloisonnée l'aire du *cercle central* par la traversée des *cercles satellites*, de gauche et de droite, qui le coupent en l'accompagnant comme un *cortège* dans son mouvement générateur.

Nous ne compterons essentiellement que pour une unité dans ce cortège l'ensemble des compartiments disposés en série, dont chaque terme vient, après une révolution pendant laquelle il se dilate, se superposer, à son retour, sur le suivant. Ce que nous évaluerons, en un mot, est le nombre de *tubes spiraloïdes* distincts, qui remplissent par leur ensemble la superficie externe engendrée par le *cercle central*. La plus élevée (fig. 3) des *N* droites de latitude situées au dessus de l'équateur traverse un

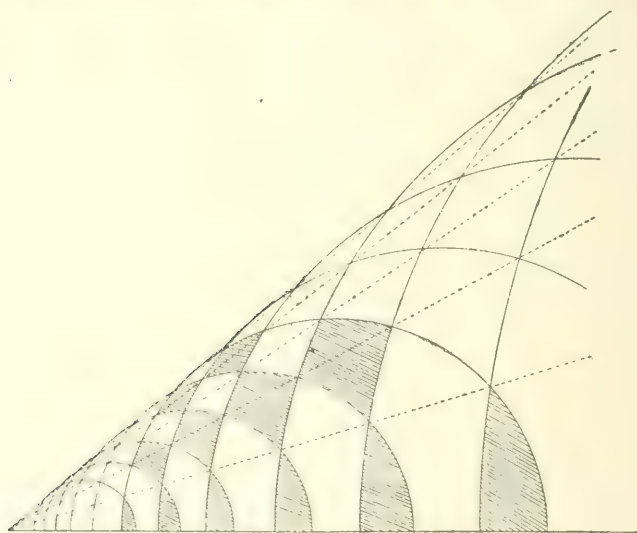


Fig. 3

triangle curviligne unique. Le rayon de rang $N - 1$ traverse deux *quadrangles curvilignes*; mais ils ne doivent compter que pour une unité se recouvrant elle-même dans la gyration qui lui fait traverser le *cercle central*. Au rayon $N - 2$ correspond également un unique quadrangle, qui se recouvre lui-même deux fois; et ainsi de suite. Le second rayon à partir de l'équateur fournit encore un dernier quadrangle, qui se recouvre $N - 2$ fois.

C'est donc, sur le pied d'un seul tube spiraloïde pour chaque rayon de latitude, un total de $N - 1$ tubes. En vertu de la sy-

métrie, nous en avons tout autant au dessous de l'équateur; soit en tout $2(N-1)$.

Mais il nous reste encore à envisager le premier rayon, aussi bien au dessus qu'en dessous de ce plan. L'une et l'autre de ces deux droites traversent un même *sextangle curviligne*, formé de six arcs de cercle, et se recouvrant lui-même $N-1$ fois dans la gyration. Il ne compte donc ici que pour un seul tube, tant au point de vue des recouvrements successifs que pour les deux côtés de l'équateur.

Il en est de même en ce qui concerne l'axe polaire qui traverse des *biangles curvilignes*, composés chacun de deux arcs de cercle régnant des deux côtés du plan de symétrie. Ce compartiment se recouvre N fois, et l'ensemble ne compte encore que pour une unité. En la joignant à la précédente et aux $2(N-1)$ trouvées ci-dessus, nous obtenons donc un total définitif de $2N$ tubes.

21. Evaluons de même le nombre des points de croisement de ce réseau.

Nous en trouvons 2 sur le N^c rayon; 3 sur le $(N-1)^c$, 4 sur le $(N-2)^c$, ..., N sur le 2^c , et enfin $N+1$ sur le premier. L'axe polaire ne traverse aucun croisement. Ce total est donc

$$\frac{(N+1)(N+2)}{2} - 1 = \frac{N(N+3)}{2},$$

mais il en existe autant au dessous de l'équateur, et le chiffre définitif devient

$$(13) \quad N(N+3).$$

22. Enumérons encore les arcs de cercle distincts qui constituent le canevas de ce cloisonnement.

Le premier satellite de gauche présente, à l'intérieur du cercle central, un arc qui tourne sa convexité vers la droite et traverse l'axe polaire; le second, un arc au dessus de cet axe, un au dessous, et un troisième qui le traverse; le troisième satellite donne deux arcs au dessus, deux au dessous, et un cinquième transverse; et ainsi de suite. Le N^c satellite en fournira $2N-1$. On obtient donc la série:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2N-1) = N^2.$$

Mais les satellites de droite en présentent un nombre égal qui tournent leur convexité vers la gauche. Et enfin le cercle générateur, pour son propre compte, en possède $4N$ le long de sa

périphérie complète. Le total est donc

$$N^2 + N^2 + 4N = 2N(N + 2).$$

Ce résultat peut servir à contrôler le précédent (13). En effet en chaque point de croisement se rencontrent deux cercles. Il en part donc quatre *amorces*, à savoir $4N(N + 3)$ en tout. Il y a toutefois exception pour les $4N$ points du cercle central, d'où ne partent que trois amorces, puisque nous ne sortons pas à l'extérieur. Le résultat est donc

$$4N(N + 3) - 4N = 4N(N + 2).$$

Mais chaque arc de cercle soude l'une à l'autre deux amorces. Leur nombre est donc la moitié de ce dernier, c'est-à-dire égal à celui que nous avons trouvé plus haut.

23. Nous pouvons déterminer les différentes valeurs des angles plans que comprennent entre eux les divers de arcs cercle du cloisonnement.

L'angle des deux circonférences qui ont pour centres C et C' (fig. 4) est le même que celui CGC' de leurs normales. Or son

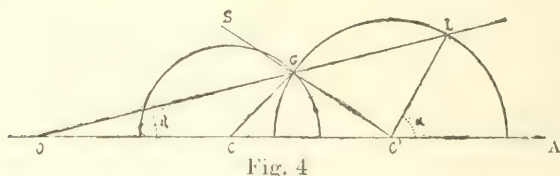


Fig. 4

supplément CGS a pour bissectrice GO d'après la proportion

$$\frac{CG}{CO} = \frac{C'G}{C'O}.$$

On a donc

$$CGC' = \pi - 2(CGO),$$

et d'autre part

$$\frac{\sin CGO}{\sin COG} = \frac{CO}{CG},$$

$$\frac{\sin CGO}{\sin \lambda} = \frac{r}{Br},$$

$$\sin CGO = \frac{\sin \lambda}{\sin b}.$$

Il vient d'après cela

$$\sin CGO' = \sin 2 (CGO) - 2 \frac{\sin \lambda}{\sin b} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 b}} \\ - \frac{2 \sqrt{(1 - \cos^2 \lambda)(\cos^2 \lambda - \cos^2 b)}}{\sin^2 b},$$

expression dans laquelle il suffira de substituer successivement les N valeurs (10) de $\cos \lambda$.

24. Nous pouvons également évaluer les longueurs respectives des divers arcs du cloisonnement.

Ce sont en effet les différences consécutives des arcs tels que $\alpha = AL$, interceptés sur le cercle central entre l'axe polaire OA et les diverses lignes de latitude OL . Or nous avons

$$AC/L - AOL = CL'O = CGO,$$

et par conséquent, d'après les valeurs précédentes,

$$\sin (\alpha - \lambda) = \frac{\sin \lambda}{\sin b}.$$

§ IV

Mouvement nautiloïde

25. Le nautilé que nous venons d'étudier avec détail : vectoriel, à front méridien, directrice spirale, et génératrice circulaire, n'est pas le seul type que cette analyse nous permette de rattacher à l'aspect extérieur du coquillage de ce nom. Nous en rencontrerons encore d'autres qui se rapprocheront de plus en plus exactement de cette ressemblance : nautilés à front normal, à front oblique, sphéro-nautilé. Il sera toutefois inutile de reprendre pour chacun d'eux cette description si complexe.

Revenons pour le moment à une plus grande généralité, et tout en conservant le caractère vectoriel et la spirale logarithmique comme directrice, reprenons une génératrice quelconque (et non plus circulaire), avec une inclinaison frontale constante (mais non plus nulle).

Dans ces conditions, le rayon vecteur OM de la spirale (fig. 1), la tangente en son extrémité, la trace du plan de front, ce plan

lui-même, la ligne génératrice qu'il contient, l'ordonnée Nn d'un de ses points, ainsi que le rayon vecteur On de la projection équatoriale de ce dernier, constituent ce que j'appellerai un *édifice géométrique*, immuable de forme, conservant sans altération chacun de ses angles pendant le mouvement générateur, mais amplifiant homothétiquement toutes ses dimensions par rapport au centre de similitude M , à l'unisson du rayon vecteur OM , c'est-à-dire suivant une progression géométrique, tandis qu'il tourne d'après une progression arithmétique autour de l'axe zénithal O .

Je regarde comme *fondamentale* pour cet ordre de recherches la conception de cet édifice géométrique, dans lequel nous pourrions successivement, à l'occasion de chacune des questions distinctes, *incruster*, pour en faire partie intégrante, les divers éléments de ces questions, à la condition *essentielle* qu'ils *relèveront eux-mêmes de la similitude*, c'est-à-dire conservent les angles et les rapports de dimensions.

C'est d'ailleurs de cette manière que l'on pourrait, même en géométrie plane pour l'étude de la spirale logarithmique, tout faire dépendre de la similitude de la figure élémentaire constituée par deux rayons vecteurs infiniment voisins avec les tangentes menées sous un angle immuable en leurs extrémités. La considération de cet *édifice plan*, auquel on rattacherait chaque fois les éléments des diverses questions qui ont été traitées sur cette belle courbe, me paraît être la *raison profonde* de tant de remarquables propriétés, et de son extraordinaire persistance à se reproduire toujours la même ⁽¹⁾, toutes les fois que l'on exécute sur elle des constructions dépendant uniquement de la similitude: au point que cette incessante réapparition finit par devenir en quelque sorte banale, et fatigante par son élégance même.

Il convient, d'après ces vues, de commencer par approfondir les propriétés générales du *mouvement nautiloïde* de cet édifice, c'est-à-dire en définitive d'une figure quelconque. On ne rencontre pas cette étude dans la cinématique classique, par la raison que celle-ci n'envisage que des solides invariables, tandis qu'il s'agit essentiellement ici de figures déformables.

26. Considérons (fig. 5) le déplacement d'une droite quelconque de longueur finie, depuis une position PQ jusqu'à une

(1) *Eadem mutata resurgo* (JACQUES BERNOULLI).

autre $P'Q'$, avec changement d'orientation et de grandeur tout à la fois.

Nous allons reconnaître qu'une pareille transposition peut toujours être effectuée par un *mouvement navtiloïde*, c'est-à-dire en faisant décrire par P et Q , autour d'un même pôle O , deux angles égaux, en parcourant deux spirales logarithmiques PP' , QQ' , données d'un même angle caractéristique α .

L'angle $\alpha = POP'$ dont tournent à la fois les trois côtés du triangle inconnu OPQ pour venir, avec dilatation, occuper l'emplacement $OP'Q'$ nous est immédiatement connu en

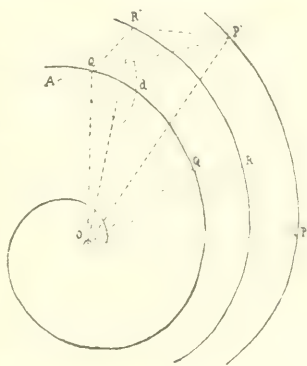


Fig. 5

$$\alpha = PAP'.$$

Il doit d'ailleurs satisfaire aux relations

$$e^{\alpha \cot \alpha} = \frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{P'Q'}{PQ},$$

dont le dernier membre nous est également donné. L'angle caractéristique α des spirales se trouve ainsi déterminé.

D'autre part, on voit que le point O appartient nécessairement à deux segments capables de l'angle α , décrits respectivement sur PP' et QQ' . Il se trouve donc lui-même déterminé ⁽¹⁾.

27. Supposons maintenant qu'une figure quelconque se meuve dans son propre plan d'une manière arbitraire, mais sous la condition de rester semblable à elle-même; et analysons les circonstances de son déplacement instantané.

Cette figure, quelle qu'elle soit, se trouvera complètement déterminée par une de ses droites PQ . En effet, appelons R un quelconque de ses points. On peut le rattacher à cette droite par un triangle PQR qui devra rester semblable à lui-même,

⁽¹⁾ C'est d'ailleurs sans aucune ambiguïté, bien que deux cercles se coupent en deux points, car on sait que la seconde se rapporte aux segments capables de l'angle supplémentaire $\pi - \alpha$, et non plus α .

et que l'on saura par suite construire en $P'Q'R'$ une fois que l'on connaîtra la seconde position $P'Q'$ de PQ .

Or cette droite peut être amenée en $P'Q'$ par un mouvement nautiloïde d'un certain pôle O et d'un angle caractéristique α . Dès lors, dans le triangle OPR (fig. 5), qui devient $OP'R'$, le rayon vecteur OR tourne jusqu'en OR' , du même angle que OP pour venir en OP' , puisque l'angle $ROP = R'OP'$. De plus le rapport de OR à OR' est le même que celui de OP à OP' , d'après la similitude de ces triangles. Le point R parvient donc en R' par une spirale de même pôle et de même angle. De là se dégage la conclusion suivante :

Dans le mouvement instantané d'une figure plane qui se déforme en restant semblable à elle-même, les divers points se déplacent le long de spirales logarithmiques égales et de même pôle.

28. Tous les points s'échappent donc simultanément de leurs positions actuelles avec des vitesses proportionnelles à leurs distances au pôle et sous le même angle par rapport à ces rayons vecteurs.

On peut dès lors décomposer ces vitesses suivant le rayon et sa perpendiculaire à l'aide de triangles rectangles semblables entre eux, dont les composantes respectives seront dès lors toutes proportionnelles. En d'autres termes, un mouvement élémentaire de similitude peut toujours être décomposé en deux autres : 1° une rotation sans déformation autour d'un pôle instantané; 2° une déformation homothétique par rapport à ce pôle sans rotation ⁽¹⁾.

Si l'on fait connaître la direction des vitesses de deux points, ainsi que le rapport de leurs deux composantes, la valeur de ce dernier fait connaître l'angle caractéristique des spirales. Si alors on trace deux rayons formant cet angle avec les directions des vitesses, ils détermineront par leur intersection le pôle instantané.

Une fois celui-ci connu, l'on en déduira pour tout autre point la direction de sa vitesse, en menant son rayon vecteur et faisant avec lui l'angle en question. Si l'une des deux vitesses est en outre donnée en grandeur, on obtiendra par proportion toutes les autres.

(1) Lorsque la figure reste indéformable, la seconde composante disparaît, et l'on retrouve le théorème du centre instantané de rotation de la cinématique classique.

29. Après ce déplacement des points, envisageons celui des droites liées à la figure qui est animée d'un mouvement nautiloïde.

Traçons une quelconque des spirales décrites par les points de l'édifice géométrique (fig. 6). La droite considérée DD' la rencontre en M sous un certain angle b . Soient r, θ les coordonnées de ce point, et R, ω celles d'un point quelconque N de la droite. Abaissons la perpendiculaire OP. Pour établir l'équation de DD' nous écrivons

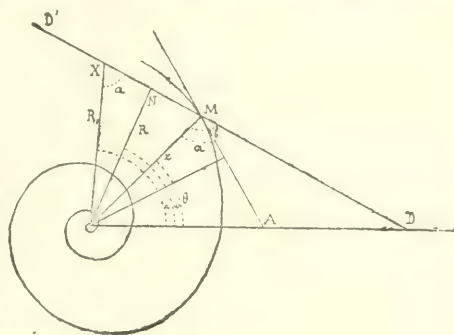


Fig. 6

$$NO \cdot \cos NOP = OP - MO \cdot \cos MOP,$$

$$NOP = \omega - \left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - b \right) \right] = \frac{\pi}{2} - (\theta - \omega + b),$$

$$MO \cdot \cos MOP = r \sin OMP,$$

et finalement

$$(14) \quad R \sin (\theta - \omega + b) = e^{A\theta} \sin b.$$

La recherche de l'enveloppe de cette droite se fera en éliminant le paramètre θ entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à lui

$$(15) \quad R \cos (\theta - \omega + b) = A e^{A\theta} \sin b.$$

On en déduit

$$\tan (\theta - \omega + b) = \frac{1}{A} = \tan \alpha,$$

$$\theta = \omega + \alpha - b,$$

d'où, en reportant cette valeur dans l'équation (14)

$$R = \frac{\sin b}{\sin \alpha} e^{A(\alpha - b)} \cdot e^{A\omega}.$$

On y reconnaît une spirale identique à toutes les trajectoires, mais déviée par rapport à celle du point M de l'angle

$$\Delta = \text{tang } a \cdot \text{Log} \left[\frac{\sin b}{\sin a} e^{A(a-b)} \right].$$

30. Quant au point de contact X de la droite avec son enveloppe, il est fourni par l'intersection de cette ligne avec sa position infiniment voisine. Ses coordonnées seront donc données par les deux équations (14) et (15). Or nous avons déjà trouvé par leur élimination

$$\omega_0 = \theta + a - b,$$

et il en résulte

$$R_0 = r \frac{\sin b}{\sin a}.$$

On peut même se dispenser de ce calcul en remarquant qu'il suffit de mener par le pôle une droite OX faisant avec DD' l'angle a , puisque cette droite jouera en X le rôle de rayon vecteur, et DD' celui de tangente de la spirale logarithmique.

31. Imaginons maintenant une figure à trois dimensions dont la trace équatoriale se trouve animée dans son plan d'un mouvement nautiloïde. Le déplacement dans l'espace restera gouverné par les propriétés précédentes.

La seule modification dans les énoncés (mais elle est essentielle) consiste en ce que les trajectoires des points qui restent homologues, au lieu d'être comme ci-dessus des spirales logarithmiques, deviennent des conhélices. En effet, pour chacune d'eux l'altitude z s'amplifie dans le même rapport que R , puisque tout l'édifice géométrique conserve sans altération ses divers rapports de dimensions. Il en sera dès lors de même de l'angle que fait cette droite avec l'horizon, à la surface du cône de latitude sur lequel elle se trouve tracée.

§ V

Equation des surfaces nautiloïdes

32. On peut, d'une manière générale, ramener au type du nautiloïde à front méridien la surface engendrée par le mouve-

ment nautiloïde d'une ligne quelconque S , plane ou gauche, liée comme édifice géométrique au rayon vecteur d'une spirale logarithmique.

En effet chacun de ses points parcourt dans l'espace une cônhélice, et la surface engendrée se trouve entièrement sillonnée du système de ces trajectoires. Coupons la par un plan méridien, et soit s la section. Lions cette ligne plane au rayon OM et à la courbe S ; puis recommençons le mouvement nautiloïde de cet édifice ainsi complété. Les divers points de s devront pour cela décrire des cônhélices qui sont complètement déterminées par la spirale directrice, et ne sauraient par suite différer de l'ensemble précédent. La surface nautiloïde sera donc susceptible de ce nouveau mode de génération (s), aussi bien que du premier (S).

33. Or, sous cette forme simplifiée, il nous est facile de former l'équation générale de cette famille de surfaces.

Nous avons en effet trouvé pour une surface *quelconque* à front méridien (5)

$$R = F_{(\omega)} + \varphi_{(\omega)} \left[\frac{z}{\varphi_{(\omega)}} \right].$$

Si la directrice est une spirale logarithmique, il vient

$$R = e^{A(\omega)} + \varphi_{(\omega)} f \left[\frac{z}{\varphi_{(\omega)}} \right].$$

Si de plus la surface est vectorielle, nous remplaçons φ par le rayon vecteur

$$R = e^{A(\omega)} [1 + f(z e^{-A(\omega)})].$$

Mais il devient dès lors inutile de conserver en évidence la trace de la fonction f , et nous pouvons remplacer par ϕ le symbole $1 + f$ de fonction arbitraire, ce qui donne plus simplement

$$(16) \quad R = e^{A(\omega)} \phi(z e^{-A(\omega)}).$$

Telle est l'équation d'un nautiloïde quelconque ayant pour génératrice, dans le premier méridien ($\omega = 0$), le profil

$$R = \phi(z).$$

On peut également lui donner une seconde forme, en désignant par Ψ la fonction inverse de ϕ . La méridienne initiale

devient alors

$$z = \Psi(R),$$

et l'équation de la surface

$$(17) \quad z = e^{A\omega} \Psi(R e^{-A\omega}).$$

34. On sait que les familles classiques de surfaces dont l'équation générale renferme une fonction arbitraire peuvent être caractérisées chacune par une équation différentielle partielle unique du premier ordre. Il nous est aisé de formuler celle des nautiloïdes.

La relation (17) donne, en la différentiant par rapport à R

$$\begin{aligned} z e^{-A\omega} &= \Psi(R e^{-A\omega}), \\ \frac{\partial z}{\partial R} e^{-A\omega} &= e^{-A\omega} \cdot \Psi'(R e^{-A\omega}), \\ \frac{\partial z}{\partial R} &= \Psi'(R e^{-A\omega}); \end{aligned}$$

et d'autre part, en différentiant relativement à ω

$$\begin{aligned} e^{-A\omega} \frac{\partial z}{\partial \omega} - A z e^{-A\omega} &= (-A R e^{-A\omega}) \Psi'(R e^{-A\omega}), \\ \frac{\partial z}{\partial \omega} - A z &= -A R \Psi'(R e^{-A\omega}), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(18) \quad R \frac{\partial z}{\partial R} + \frac{\partial z}{\partial \omega} \tan \alpha = z.$$

Telle est l'équation cherchée ⁽¹⁾.

35. Il est facile, au moyen du changement de variables, de

(¹) Il ne saurait être question d'élever l'objection qu'un changement de coordonnées relevant le plan horizontal, aurait pour effet de modifier le second membre sans changer le premier. Cette analyse suppose en effet essentiellement que le plan de l'équateur passe par les centres de similitude, et se trouve ainsi absolument déterminé.

la transcrire dans le système rectangulaire

$$(x \cos a - y \sin a) \frac{\partial z}{\partial x} + (x \sin a + y \cos a) \frac{\partial z}{\partial y} = z \cos a.$$

On peut également écrire, en introduisant la longitude ω

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cos(\omega - a) + \frac{\partial z}{\partial y} \sin(\omega - a) = \frac{z}{R} \cos a.$$

D'ailleurs les quantités $\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y}$ représentent les inverses $\frac{1}{S_x}$, $\frac{1}{S_y}$ des sous-tangentes des sections faites par des plans parallèles aux plans verticaux de coordonnées. Nous écrirons donc

$$\cos(\omega + a) = \frac{S_y}{S} \quad \sin(\omega + a) = \frac{\cos a}{R}.$$

Associons (fig. 7) au plan méridien ZOn du point N de la surface, la seconde face ZOA d'un dièdre *invariable* a , et prenons sa trace équatoriale OA comme axe de projections. Cette dernière relation s'interprète alors de la manière suivante:

Dans toute surface nautiloïde, la projection sur l'axe ainsi défini de l'inverse du rayon vecteur On est la somme des projections des inverses des sous-tangentes des sections faites par deux plans méridiens rectangulaires quelconques ⁽¹⁾.

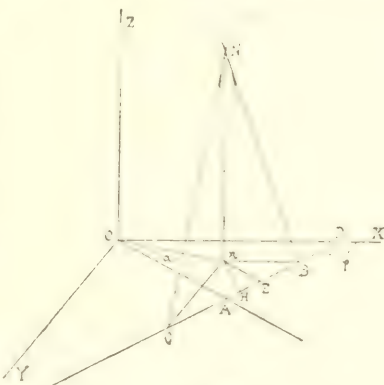


Fig. 7

Mentionnons encore une autre interprétation de l'équation différentielle partielle. La droite BC qui joint les extrémités des sous-tangentes nB , nC n'est autre que la trace du plan tangent en N , qui doit contenir toutes les tangentes à la surface. En

(1) Car on peut toujours adopter des plans coordonnés qui leur soient parallèles.

appelant φ l'angle que fait cette droite avec la partie positive de l'axe des abscisses, et h la hauteur nH du triangle nBC , nous aurons

$$S_x = \frac{h}{\sin \varphi}, \quad S_y = -\frac{h}{\cos \varphi},$$

d'où par conséquent

$$\begin{aligned} \cos(\omega + a) \sin \varphi - \sin(\omega + a) \cos \varphi &= \frac{h}{R} \cos a, \\ R &= \frac{h}{\sin[\varphi - (\omega + a)]} = \frac{h}{\sin(ADX - AOX)} = \frac{h}{\sin OAD}. \end{aligned}$$

Menons par n la parallèle nE à l'axe OA , il nous viendra

$$\frac{On}{\cos nOA} = \frac{nH}{\sin nEA},$$

ou enfin, en élevant en n la perpendiculaire nF au rayon vecteur

$$OF = nE.$$

De là cet énoncé:

La portion de l'axe OA qui se projette orthogonalement sur le rayon vecteur On est égale à la distance de ce point n à la trace du plan tangent en N comptée parallèlement à cet axe OA .

36. On envisage d'ordinaire, pour les familles de surfaces, deux problèmes généraux, qui consistent à faire passer une surface de cette catégorie par une courbe donnée ou à en circonscrire une à une surface assignée. Nous pouvons tracer la marche propre à résoudre ces questions en ce qui concerne les nautiloïdes.

Pour la première, nous commencerons par ramener les équations de la courbe donnée à la forme

$$z = F_1(R), \quad R = F_2(\omega).$$

La première est celle de la surface de révolution qu'elle décrirait en tournant autour de l'axe zénithal; la seconde celle du cylindre qui la projette sur le plan équatorial.

En substituant ces valeurs dans l'équation générale des nautiloïdes (16), il vient

$$F_2(\omega) = e^{A\omega} \left\{ \frac{1}{2} e^{-A\omega} \cdot F_1[F_2(\omega)] \right\}.$$

Envisageons comme une variable auxiliaire μ la quantité subordonnée à la fonction inconnue ψ

$$\mu = e^{-A\omega} F_1 [F_2(\omega)] ,$$

et résolvons cette relation sous la forme

$$\omega = F_3(\mu) ,$$

il viendra

$$\psi(\mu) = e^{-AF_3(\mu)} \cdot F_2 [F_3(\mu)] ,$$

ce qui détermine la fonction qui permettra d'écrire l'équation du nautiloïde.

37. Proposons nous en second lieu de circonscrire un nautiloïde à la surface

$$(19) \quad F_4(R, \omega, z) = 0 .$$

En leurs divers points de contact, les coefficients différentiels $\frac{\partial z}{\partial R}$, $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ seront les mêmes pour toutes les deux. Or, sur la proposée, ils prennent les valeurs

$$\frac{\partial z}{\partial R} = - \frac{\frac{\partial F_4}{\partial R}}{\frac{\partial F_4}{\partial z}} , \quad \frac{\partial z}{\partial \omega} = - \frac{\frac{\partial F_4}{\partial \omega}}{\frac{\partial F_4}{\partial z}} .$$

Pour le nautiloïde, ils doivent satisfaire à l'équation différentielle partielle (18), qui deviendra par cette substitution

$$R \frac{\partial F_4}{\partial R} + \tan g \alpha \frac{\partial F_4}{\partial \omega} + z \frac{\partial F_4}{\partial z} = 0 ,$$

Nous obtiendrons ainsi, en joignant cette égalité à la formule (19), les deux équations de la courbe de contact.

Il suffit dès lors de la prendre comme directrice pour rentrer dans les conditions du problème précédent (N^o 36).

Mais on a d'un autre côté

$$\frac{nn'}{MM'} = \frac{R}{r}, \quad \frac{dz}{dr} = \frac{z}{r},$$

et par conséquent

$$(20) \quad S = R \cdot \frac{MM'}{dr} = \frac{R}{r} \left(r \frac{MM'}{dr} \right).$$

Si l'on appelle T la longueur MT interceptée sur la tangente de la directrice par la perpendiculaire élevée à partir du pôle sur son rayon vecteur OM , elle sera fournie par la proportion

$$\frac{T}{r} = \frac{MM'}{dr}.$$

Il vient donc

$$S = \frac{R}{r} T.$$

Or il nous suffit d'élever en O la perpendiculaire Ot sur le rayon vecteur On de la projection n pour constituer en Ont un triangle semblable à OMT . C'est par conséquent la longueur nt ainsi interceptée sur la tangente qui mesurera la sous-tangente S , et fournira en t la trace de la tangente à la trajectoire de N dans l'espace ⁽¹⁾.

Indépendamment de cette construction géométrique, nous possédons également (20) l'expression analytique de cette sous-tangente sous la forme

$$(21) \quad S = R \sqrt{1 + \frac{r^2 d\theta^2}{dr^2}} = R \sqrt{1 + \frac{F^2}{f'^2}}.$$

39. Si l'on veut déterminer le lieu géométrique de ces traces t pour une conhélice, il suffit de remarquer que le rayon vecteur Ot reste proportionnel à R , et par suite à z : qu'en outre il est séparé de ce dernier par l'angle constant MON

⁽¹⁾ Remarquons à cette occasion que cette construction des angles OMT , Ont , tous égaux entre eux pour les divers points n du front FF' est bien conforme à la loi trouvée ci-dessus (N° 29) pour le mouvement instantané d'une figure qui reste semblable à elle-même.

augmenté d'un quadrant. Ce lieu est donc semblable à la directrice.

On peut exprimer autrement ce résultat. Concevons en effet les surfaces développables qui ont pour arêtes de rebroussement les diverses lignes de latitude et sont formées par l'ensemble des tangentes de chacune d'elles. Ces surfaces auront toutes, d'après ce qui précède, leur trace équatoriale semblable à la directrice.

40. Envisageons en second lieu la tangente Nt' de la génératrice. Elle doit, au point de vue graphique, être considérée comme directement connue.

Nous en possédons en outre la détermination analytique, d'après la valeur S' de la sous-tangente nt' qu'elle intercepte sur la trace du plan de front. Elle est fournie par la proportion

$$\frac{S'}{z} = \frac{d\xi}{dz}.$$

Si donc nous différencions l'équation (1) de la génératrice entre ξ et z , en considérant θ et r comme des paramètres constants, l'on pourra écrire

$$(22) \quad S' = z f' \left(\frac{z}{r} \right).$$

41. La trace du plan tangent s'obtient en joignant celles des deux tangentes précédentes, c'est-à-dire en tirant tt' . La figure (8) devient ainsi, à proprement parler, une épure, très élémentaire, de géométrie descriptive, ayant pour ligne de terre la trace du front FF' . Le plan tangent s'y trouve représenté, suivant le mode ordinaire, par ses deux traces $t't$ et $t'N$.

La normale le sera de son côté par les perpendiculaires nB , nC abaissées des projections N , n du point de contact sur les traces du plan.

Nous pouvons exprimer analytiquement les angles h , v compris entre les traces horizontale et verticale du plan tangent et celle du front: ainsi que les dièdres H , V que forme ce dernier avec les plans de l'équateur et du front.

On a en premier lieu dans le triangle Nnt'

$$\text{tang } x = \frac{z}{S}.$$

Il vient ensuite dans le triangle ntt'

$$\frac{\sin nt't}{nt} = \frac{\sin nt't'}{nt'},$$

c'est-à-dire

$$\sin h = \frac{S}{S'} \sin (Mnt - h).$$

Or on peut écrire

$$Mnt = \left(\frac{\pi}{2} - i \right) + i - (\theta - \omega) = \frac{\pi}{2} - (\theta - \omega),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \sin h &= \frac{S}{S'} \cos (\theta - \omega + h), \\ \frac{S'}{S} \sin h &= \cos (\theta - \omega) \cos h - \sin (\theta - \omega) \sin h. \end{aligned}$$

Mais d'ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{\sin (\theta - \omega)}{Mn} &= \frac{\sin OMn}{On}, \\ \sin (\theta - \omega) &= \frac{z}{R} \sin i. \end{aligned}$$

Nous avons donc en définitive

$$\tan g h = \frac{\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2} \sin^2 i}}{\frac{S'}{S} + \frac{z}{R} \sin i} = \frac{S \sqrt{R^2 - z^2 \sin^2 i}}{S'R + S z \sin i}.$$

Quant aux angles dièdres, il nous vient par les formules de la trigonométrie sphérique appliquées au trièdre rectangle $t'nNt$

$$\tan g H = \frac{\tan g v}{\sin h}, \quad \tan g V = \frac{\tan g h}{\sin v}.$$

On peut d'ailleurs obtenir cette même détermination d'après les triangles rectangles de l'espace DnE , NnB .

42. Ces diverses formules étant homogènes par rapport à des quantités qui restent elles-mêmes proportionnelles le long d'une même trajectoire de latitude constante, on voit que les quatre angles ainsi déterminés restent de leur côté invariables sur ce parcours.

Remarquons notamment que le plan tangent conservant une inclinaison constante sur l'horizon, enveloppe le long de cette trajectoire une *surface-talus*, telle que les contreforts géologiques que dessinent les anciens éboulis sur le flanc des montagnes.

43. Si l'on se donne directement les uns ou les autres des quatre angles h, v, H, V , on pourra constituer ainsi différents modes de détermination du plan tangent d'après ces diverses données. Nous possédons leurs valeurs en fonction de S, S', ξ, R, z . Mais nous avons d'ailleurs en fonction de θ celles (21), (22), de S, S' , ainsi que (1) de ξ .

Or nous pouvons déterminer, pour un point $N(R, \omega, \lambda)$ de la surface, le point $M(r, \theta)$ de la directrice par lequel passe le plan de front de N . En d'autres termes, nous avons à évaluer θ en fonction de R, ω, λ .

Le triangle MON nous donne à cet effet

$$\frac{\sin MON}{Mn} = \frac{\sin OMn}{On} ,$$

$$\sin(\theta - \omega) = \frac{z}{r} \frac{\sin i}{R} = \frac{\sin i}{R} \cdot rf\left(\frac{z}{r}\right) ,$$

et par conséquent :

$$R \sin(\theta - \omega) = \sin i \cdot F(\theta) f\left|\frac{z}{R(\theta)}\right| ,$$

équation à résoudre dans chaque cas par rapport à θ , lorsque seront spécifiées les fonctions F et f .

44. Nous pouvons finalement représenter le plan tangent par son équation en coordonnées rectangulaires X, Y, Z . Nous le considérerons à cet effet comme déterminé par les trois points N, t, t' .

J'appelle $x_1, y_1; x_2, y_2$ les coordonnées de ces deux traces dans le plan équatorial. Le droite tt' aura pour équation

$$(Y - y_1)(x_2 - x_1) = (X - x_1)(y_2 - y_1) ,$$

Celle du plan lui-même sera donc de la forme

$$(Y - y_1)(x_2 - x_1) - (X - x_1)(y_2 - y_1) = mZ,$$

et le coefficient inconnu m se déterminera en obligeant ce plan à passer par N , ce qui donne

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (X - x_1)(y_2 - y_1) = mZ.$$

En divisant membre à membre, nous obtiendrons donc l'équation du plan tangent. Il suffit par conséquent de connaître les quatre coordonnées $x_1, y_1; x_2, y_2$.

On a pour le point t

$$x_1 = Ot \cos tOA = On \operatorname{tang} Ont \sin nOA,$$

$$y_1 = Ot \sin tOA = On \operatorname{tang} Ont \cos nOA.$$

Mais l'angle Ont que comprennent la tangente et le rayon vecteur est le même pour les deux courbes semblables (n) et (M) (N° 8). Il vient donc

$$\operatorname{tang} Ont = \frac{F}{F'},$$

et par conséquent

$$x_1 = R \frac{F}{F'} \sin \omega = \frac{F}{F'} y, \quad y_1 = R \frac{F}{F'} \cos \omega = \frac{F}{F'} x.$$

Nous avons d'autre part en ce qui concerne le point t'

$$x_2 = R \cos \omega + S' \cos (\theta - i) = x + z f' \left(\frac{z}{F} \right) \cos (\theta - i),$$

$$y_2 = R \sin \omega + S' \sin (\theta - i) = y + z f' \left(\frac{z}{F} \right) \sin (\theta - i).$$

On remplacera θ ainsi qu'il vient d'être dit (N° 43), et l'on aura, entre les coordonnées X, Y, Z , l'équation du plan tangent au point (x, y, z) .

45. Cette théorie convient en particulier à la famille des nautiloïdes de génératrice quelconque. Il s'opère alors quelques simplifications.

Les projections des trajectoires, que nous savons être tou-

jours semblables à la directrice, lui deviennent maintenant égales, avec des déviations variées. La sous-tangente de cette conhélice est alors égale à l'arc de la spirale logarithmique qui en est la projection, compté à partir du pôle. Les traces des surfaces-talus circonscrites au nautiloïde suivant ses conhélices sont elles-mêmes des spirales logarithmiques égales mais déviées.

§ VII

Nautilé à front normal

46. Le nautilé que nous avons étudié en détail (§ III), présente sa section circulaire dans le plan méridien. Pour obtenir un type convenablement rapproché du genre *Nautilus*, tel que nous l'offre la conchyliologie, cette solution peut avoir quelque intérêt si l'angle a est suffisamment voisin du quadrant, c'est-à-dire la spirale logarithmique assez *lente*. Mais à coup sûr l'assimilation échouerait avec une directrice *rapide*. Cette première solution reste donc entachée d'une certaine insuffisance.

Pour nous en affranchir nettement, nous substituerons à la condition du front méridien ($i=0$) celle du front normal

$$i = \frac{\pi}{2} - a.$$

Dans ce but, nous commencerons par reprendre, avec cette nouvelle détermination de i , une entière généralité, c'est-à-dire une directrice F , une génératrice f , et une loi de similitude φ arbitraires.

47. La position normale nous donne

$$\tan i = \cot a = \frac{F'}{F}.$$

L'équation (2) de la trace du front devient donc

$$R [\sin (\omega - \theta) \cos i + \cos (\omega - \theta) \sin i] = F \sin i,$$

ou, en remplaçant $\sin i$ et $\cos i$ par les quantités proportionnelles F' et F

$$(23) \quad R [F \sin (\omega - \theta) + F' \cos (\omega - \theta)] = FF'.$$

D'autre part la relation (3) prend la forme

$$(24) \quad R^2 = F^2 + \frac{2F^2\varphi}{F^2 + F'^2} f\left(\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi}\right) + \varphi^2 f^2\left(\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi}\right).$$

Il n'y aura dès lors, pour obtenir en R , ω , λ , l'équation de la surface qu'à éliminer entre ces deux formules le paramètre θ compris sous les symboles F et φ .

48. Considérons comme application l'*anneau variable* engendré par une *génératrice quelconque* f avec une *loi de similitude également arbitraire* φ lorsque la directrice est un cercle passant par le pôle

$$r = \cos \theta.$$

La relation (23) nous donne alors

$$R [\sin (\omega - \theta) \cos \theta - \cos (\omega - \theta) \sin \theta] = -\sin \theta \cos \theta,$$

$$R \sin (\omega - 2\theta) = -\frac{1}{2} \sin 2\theta,$$

$$R (\sin \omega \cos 2\theta - \cos \omega \sin 2\theta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0,$$

$$\left(R \cos \omega - \frac{1}{2}\right) \operatorname{tang} 2\theta = R \sin \omega,$$

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\frac{2R \sin \omega}{2R \cos \omega - 1} \right).$$

D'autre part la formule (24) devient

$$R^2 = \cos^2 \theta \left\{ 1 + 2\varphi(\theta) f \left| \frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi(\theta)} \right| \right\} + \varphi^2(\theta) f^2 \left| \frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi(\theta)} \right|.$$

L'élimination se trouve donc faite une fois pour toutes, dans ces conditions de complète généralité, par la substitution de la valeur précédente de θ ⁽¹⁾.

(1) Il est essentiel de ne pas confondre cet *anneau variable à front normal* avec l'*anneau variable à front méridien* que nous obtiendrions en remplaçant, dans l'équation générale (S), le symbole $F(\omega)$ par $\cos \omega$.

49. Arrivons, comme seconde application, au *nautilé à section normale circulaire*, en supposant a constant.

L'équation (23) de la trace du front devient alors

$$(25) \quad R \cos(\theta - \omega + a) = e^{A\theta} \cos a.$$

La génératrice devenue un cercle de rayon B sera représentée par la formule

$$(26) \quad z = \sqrt{B^2 r^2 - z^2} = \sqrt{B^2 e^{2A\theta} - R^2 \tan^2 \lambda}.$$

La relation (24) nous donne d'après cela

$$\begin{aligned} R^2 &= e^{2A\theta} + (B^2 e^{2A\theta} - R^2 \tan^2 \lambda) + 2e^{A\theta} \sin a \sqrt{B^2 e^{2A\theta} - R^2 \tan^2 \lambda}, \\ R^2(1 + \tan^2 \lambda) - (B^2 + 1)e^{2A\theta} &= 2e^{A\theta} \sin a \sqrt{B^2 e^{2A\theta} - R^2 \tan^2 \lambda}, \\ \left[\frac{R^2}{\cos^2 \lambda} - (B^2 + 1)e^{2A\theta} \right]^2 &= 4e^{2A\theta} \sin^2 a (B^2 e^{2A\theta} - R^2 \tan^2 \lambda), \end{aligned}$$

ou en développant

$$\begin{aligned} &[(B^2 + 1)^2 - 4B^2 \sin^2 a] e^{4A\theta} \\ &- \left[\frac{2(B^2 + 1)R^2}{\cos^2 \lambda} - 4R^2 \sin^2 a \tan^2 \lambda \right] e^{2A\theta} + \frac{R^4}{\cos^4 \lambda} = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &(B^4 + 2B^2 \cos 2a + 1) \left(\frac{e^{A\theta} \cos \lambda}{R} \right)^4 \\ &- 2[B^2 + 1 - (1 - \cos 2a) \sin^2 \lambda] \left(\frac{e^{A\theta} \cos \lambda}{R} \right)^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Pour simplifier, représentons par c^2 la constante

$$(27) \quad c^2 = B^4 + 2B^2 \cos 2a + 1,$$

qui ne dépend que de A et B , c'est-à-dire a et b . Employons de même l'abréviation A pour désigner la fonction de la latitude λ qui forme le second coefficient de l'équation bicarrée

$$(28) \quad A = \sin^2 \lambda \cos 2a - \cos^2 \lambda + \sin^2 b;$$

cette dernière prend alors la forme très simple

$$c^2 \left(\frac{e^{A\theta} \cos \lambda}{R} \right)^2 - 2\Lambda \left(\frac{e^{A\theta} \cos \lambda}{R} \right)^2 + 1 = 0.$$

et donne par sa résolution

$$\left(\frac{e^{A\theta} \cos \lambda}{R} \right)^2 = \frac{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - c^2}}{c^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ce^{A\theta} \cos \lambda}{R} = \sqrt{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - c^2}}.$$

Or il arrive précisément que ces radicaux superposés remplissent la condition qui rend possible leur décomposition en radicaux simples

$$c \sqrt{2} \cos \lambda \frac{e^{A\theta}}{R} = \sqrt{\Lambda + c} \pm \sqrt{\Lambda - c}.$$

On en déduit pour exprimer, soit r , soit θ , les deux formules

$$\frac{e^{A\theta}}{R} = \frac{\sqrt{\Lambda + c} \pm \sqrt{\Lambda - c}}{\sqrt{2} c \cos \lambda},$$

$$(29) \quad \theta = \text{tang } a \text{ Log} \left[\frac{R}{\sqrt{2} c \cos \lambda} (\sqrt{\Lambda + c} \pm \sqrt{\Lambda - c}) \right].$$

Il suffit maintenant de les substituer dans la relation (25), en restituant en même temps aux abréviations Λ et c leurs significations respectives (28) et (27), pour obtenir, entre R , ω , λ , l'équation du *nautila à front normal circulaire*.

50. En y faisant $\omega = 0$, on obtiendra entre R et λ , ou R et z , l'équation de la courbe capable d'engendrer ce même nautila comme surface nautiloïde à *front méridien* (N° 32).

Si l'on coupe au contraire par un cône de latitude, λ devient constante, ainsi que Λ . L'exponentielle est alors proportionnelle à R , qui disparaît de l'équation (25); mais il reparait par la substitution de la valeur (29) de θ . La formule exprime alors que ω est, sauf une constante, égal à $\text{Log } R$, ce qui est l'équation de la spirale logarithmique. Nous savons en effet que telle est la projection de la cônhélice.

Nous obtenons de plus les conditions de la réalité de cette intersection. Il nous faut en effet poser, pour assurer celle du second radical

$$A^2 \geq c,$$

c'est-à-dire

$$\sin^2 \lambda \cos 2a + \cos^2 \lambda + B^2 - c > 0.$$

Si le cône de latitude commence par être très ouvert dans le voisinage de l'équateur, λ s'écarte peu de 90 degrés, et cette expression de

$$\cos 2a + B^2 - c,$$

quantité négative. On a en effet

$$(\cos 2a + B^2)^2 = B^4 + 2B^2 \cos 2a + \cos^2 2a,$$

$$c^2 = B^4 + 2B^2 \cos 2a + 1,$$

et ce dernier résultat est supérieur au précédent. Il faut donc que λ reste inférieure à la latitude limite λ_0 capable d'annuler l'expression ci-dessus

$$\sin^2 \lambda_0 \cos 2a + \cos^2 \lambda_0 + B^2 - c = 0,$$

$$\text{tang } \lambda_0 = \sqrt{\frac{1 + B^2 - c}{c - B^2 - \cos 2a}}.$$

Cette valeur fournira l'équation de la cône-hélice de contact avec le cône limite; laquelle se dédouble ensuite en deux autres pour des latitudes moindres.

51. Si l'on remplaçait z par mz dans l'équation (26) du cercle générateur et dans la suite du calcul, on obtiendrait de même l'équation de la surface nautiloïde à *front normal elliptique*; type dont se rapprochent dans la nature fossile certaines ammonites.

(A suivre.)

MOLLUSQUES TERRESTRES DU PORTUGAL

PAR

AUGUSTO NOBRE

I

MONOGRAPHIE DES FAMILLES *PUPIDÆ* ET *STENOGYRIDÆ* ⁽¹⁾

FAM. IV -- **PUPIDÆ**

Les animaux de cette famille ont, à peu près, la forme de la famille précédente, l'*Helicidae*. Le corps est plus ou moins long, toujours pointu à l'extrémité caudale et plus ou moins tronqué à l'avant. La mâchoire est lisse ou finement striée et la radule constituée par une dent centrale tricuspidée, identique aux dents latérales; dents marginales transverses très courtes et denticulées. La coquille a une forme allongée ou courte, cylindrique ou plus ou moins conique, avec nombreux tours de spire et à ouverture arrondie ou subquadrangulaire parfois, portant des dents ou plis.

La famille des Pupidæ qui vivent en Portugal se compose de cinq genres :

Coquille oblongue conique, dextre perforée, à péristome réfléchi, tranchant, ouverture ovale-allongée, sans dents ni plis

G. Buliminus.

(1) L'introduction à ce mémoire sera publiée avec la dernière monographie.

- Coquille peu allongée, conique ou courte, cylindracée, dextre, perforée, avec une ou plusieurs dents à l'ouverture. Animal avec deux tentacules supérieurs et deux inférieurs G. Pupa.
- Coquille cylindracée, petite, peu conique, perforée, dextre, sans dents ou avec plusieurs dents à l'ouverture. Animal seulement avec deux tentacules supérieurs G. Vertigo.
- Coquille allongée, fusiforme, sénestre, perforée, fragile, faiblement striée, péristome tranchant, ouverture sans dents ni plis G. Balea.
- Coquille assez allongée, fusiforme, sénestre, perforée, épaisse, fortement striée, péristome bordé, ouverture petite avec des plis, et un *clausilium*, plaque mobile qui obture l'intérieur du dernier tour G. Clausilia.

G. Buliminus Ehrenberg

Ce genre comprend une seule espèce.

Buliminus obscurus, Müller

Pl. I — Fig. 1 et 2

Helix obscura, Müller. — Linné, Syst. Nat., éd. Gmelin, 9.^e, p. 208 (1794).

Bulimus obscurus, Müller. — Drap., Hist. Moll., p. 74, pl. 4, f. 23 (1805) — Rossmässler, Iconogr., 5^e, p. 46, pl. 28, f. 386 (1887) — Morelet, Moll. Portugal, p. 73 (1845) — Graells, Cat. Mol. España, p. 7 (1846) — Gassies, Moll. Agenais, p. 112 (1849) — Dupuy, Hist. Moll., p. 318, pl. 15, f. 6 (1849) — Reeve, Conch. icon., V. pl. 87, f. 647 (1849) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 291, pl. 21, f. 5-10 (1855) — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 183 (1875) — Nobre, Moll. Coimbra, p. 10 (1886) — Locard, Conchyl. port., p. 136 (1899).

Animal assez petit, d'un brun roussâtre ou presque noir, sur le cou et la tête, plus clair sur les flancs et le pied et pigmenté de noir; pied sillonné par des lignes verticales; tronqué à la partie antérieure, large et terminé postérieurement en pointe; tentacules supérieurs longs, rugueux, avec le globe oculaire un peu dilaté; tentacules inférieurs d'un quart de la longueur totale des supérieurs, mamelonnés; haut, 5 à 6 m.m.; diam. 2 m.m. L'animal marche avec la coquille assez haute et un peu inclinée sur le côté droit.

Coquille turriculée, oblongue, conique, peu solide, comme veloutée et à peine luisante au sommet; spire composée de six tours un peu convexes, décroissant rapidement en diamètre de la région moyenne vers le sommet; surface de la coquille ornée

de stries très fines, nombreuses et très obliques; suture assez profonde; ouverture ovale allongée, parfois presque subquadrangulaire; un peu oblique; péristome interrompu à la partie supérieure, réfléchi et assez mince; cavité ombilicale assez étroite et recouverte par le bord columellaire; couleur brunâtre uniforme; labre blanchâtre. Long. 9-11 m.m.; diam. 2-3 m.m.

Hab. *Traz-os-Montes*. Environs de Bragança, rare (Morelet). Bragança, près des murailles du château: Macedo de Cavaleiros (Nobre).

Douro. Coïmbra (Aguilar, Rosa de Carvalho, Nobre, Castro). Condeixa, Fonte dos Amores (Coll. Mus. Lisbonne).

Extremadura. Thomar (Nobre).

Algarve. Serra de Monchique (Coll. Mus. Porto; assez commun).

Vit sous les pierres et les détritux végétaux et sur les mousses humides.

G. Pupa, Draparnaud

Ce genre comprend quatre espèces.

| | | | |
|---|-------------------|--|---|
| Coquille cylindracée-ovulaire, trapue, péristome plus ou moins épaissi, avec une seule dent à l'ouverture | Sec. Torquilla | Plus longue que 6 m.m., stries épaisses, deux dents à la partie supérieure de l'ouverture, quatre dans la face interne dont la supérieure très réduite | P. avenacea , Brug., var. <i>Laesidonica</i> , Ross. |
| | | Plus courte que 6 m.m., stries fines, une dent à la partie supérieure de l'ouverture, trois ou quatre à la face interne | P. granum , Drap. |
| Coquille conique, fusiforme, allongée, avec plusieurs dents à l'ouverture | Sec. Pupilla | Coquille ovale cylindracée, sommet acuminé, ouverture allongée, une dent, recourbée, à la base du dernier tour et à l'insertion du péristome qui est très réfléchi | P. umbilicata , Drap. |
| | | Coquille ovale-cylindracée, sommet obtus, ouverture petite, arrondie, une dent conique et petite au milieu de la base du dernier tour, péristome peu réfléchi | P. muscorum , Lin. |

Sec. Torquilla, Studer

Pupa avenacea, Bruguière

Var. *Luzitanica*, Rossmässler

Pl. I — Fig. 3, 4

Pupa avenacea, Brug., Encycl. méth., XI, 2^e, p. 355 (1792).

Pupa arena, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 59 (1801), Hist. moll., p. 64, pl. 3, f. 47-48 (1805).

Pupa secale, Draparnaud. — Morelet, Moll. de Portugal, p. 74 (1845) — Révision, Moll. Portugal, p. 247 (1877) — Hidalgo, Cat. icon., p. 246 (1875) — Luso, Moll. Portugal, p. 63 (1872) — Nobre, Moll. de Coïmbra, p. 11 (1886).

Pupa Luzitanica. — Rossmässler, Iconogr., 3^e, p. 105, pl. 84, f. 935 (1859) — Hidalgo, Cat. icon., p. 245 (1875) — Locard, Conchyl. port., p. 147 (1899).

Pupa avenacea, var. *Luzitanica*. — Albers, Die Helic., p. 288 (1854) *vide* Locard.

Animal assez petit, d'une couleur d'ardoise foncée sur la tête et le cou, plus clair sur les flancs; tentacules supérieurs un peu longs, à globes oculaires assez dilatés; inférieurs assez courts mamelonnés; pied étroit et conique à l'extrémité postérieure.

Coquille conique fusiforme, allongée, assez épaissie; spire composée de sept tours un peu bombés, le dernier d'un tiers au plus de la longueur totale; surface ornée de stries assez fortes, inclinées et parfois flexueuses; suture profonde; ouverture ovale-allongée, subquadrangulaire, portant deux dents à la partie supérieure, dont l'une plus superficielle touchant le bord du labre et l'autre plus petite et placée plus à l'intérieur; deux plis à la columelle, le supérieur plus long que l'inférieur et trois autres, longs, placés dans l'intérieur du côté inférieur et droit du labre et un autre plus petit, à l'extrémité supérieure; péristome interrompu sur la partie inférieure du dernier tour, épaissi et un peu réfléchi, tranchant; cavité ombilicale étroite et oblique; couleur brun foncé, uniforme, à l'exception de la base, près de l'ouverture qui est blanchâtre avec deux ou trois zones étroites et foncées; péristome et plis blanchâtres; long. 8 m.m., diam. 2 $\frac{1}{2}$ à 3 m.m.

Hab. *Douro*. Condeixa (Luso, A. Giraldes, A. Moller, Coll. Mus. Lisbonne). Coïmbra (Castro).

Extremadura. Lisbonne, Cintra, Serra d'Arrabida, sur les

rochers (Morelet): Loures, Serra de Monsanto (Castro); Campolide, contre les murs de l'aqueduc das Aguas Livres (Nobre).

Serra d'Arrabida. (Welwitsch, Coll. Mus. Lisbonne). Cintra (Coll. Mus. Lisbonne). Alcobaça, rochers en face du Poço do Suão (Coll. Mus. Lisbonne).

Assez commune à Condeixa et Campolide.

La diagnose de cette espèce est faite d'après les exemplaires que j'ai recueillis à Campolide, près Lisbonne.

Morelet a indiqué d'abord cette espèce sous le nom de *secale* et plus tard, dans la révision de son travail (Journal de Conchyliologie, 1877) il a écrit «sous le nom de *secale*, j'ai mentionné moi-même, une espèce qui participe à la fois de l'*avenacea* et du *secale*, sans répondre exactement ni à l'un ni à l'autre, mais qui est certainement le *lusitanica*, de Rossmässler».

Albers a considéré cette forme comme une simple variété de l'*avenacea*, et Moquin-Tandon donne pour l'*avenacea* une longueur totale de 6-8 m.m., qui est aussi le plus grand développement que nous avons trouvé chez les exemplaires portugais.

Pour toutes ces raisons je considère, comme Albers, la forme portugaise comme une variété méridionale de l'*avenacea*, dont elle ne diffère que par des caractères différentiels peu importants: les plis et les dents plus développées, les stries plus fortes et les dimensions un peu plus grandes.

On doit remarquer toutefois que, dans le pli que l'on trouve à l'insertion du péristome, on observe, chez quelques exemplaires, un commencement de bipartition comme celle que l'on voit sur la fig. 5 de la planche I et que par ce caractère ils s'approchent de la *secale*, qui, du reste, est bien prochaine de l'espèce en question, premièrement décrite par Bruguière.

En comparant les exemplaires portugais avec d'autres provenant de la France, de la Suisse, de l'Allemagne et de la Suède, les différences ci-dessus indiquées sont toujours constantes.

Pour ce qui se rapporte aux dents du bord droit leur nombre est de quatre, bien que chez l'*avenacea* on trouve parfois des exemplaires avec trois seulement. Le quatrième est généralement réduit à un petit mamelon.

Locard cite mon nom à propos des *Pupa Farinesi*, des Moulins et *P. pyrenearia*, Baubée, recueillies à Setubal. J'ai fait cette citation⁽¹⁾ d'après le mémoire de M. Hidalgo, *Hojas malacológicas*, où l'on trouve le résultat des récoltes de Paz y

(1) Moll. bassin Tage et Sado, p. 128 (1886).

Membrelli faites en Portugal. Je n'ai pu trouver à Setubal aucune de ces espèces et je ne sais si elles se trouvent en Portugal.

Locard indique aussi les *Pupa Brauni*, recueillie à Leiria, comme l'avait fait Hidalgo auparavant (loc. cit.), et encore le *Pupa ringens*, Caillaud, d'après Jeffreys et Morelet. Je me borne à enregistrer ces citations, sans discuter la valeur de quelques unes de ces espèces, dans le but d'appeler l'attention des naturalistes pour des recherches minutieuses.

Pupa granum, Draparnaud

Pl. I — Fig. 6

Pupa granum, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 150 (1801) — Hist. Moll., p. 63, pl. 3, f. 45-46 (1805) — Rossmässler, Iconogr., 5^e, p. 14, pl. 23, f. 322 (1837) — Morelet, Moll. Portugal, p. 74 (1845) — Dupuy, Hist. Moll., p. 396, pl. 19, f. 10 (1850) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 370, pl. 26, p. 34-38 (1855) — Bourguignat, Malac. Algérie, p. 84, pl. 6, f. 1-3 (1864) — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 215 (1875) — Luso, Moll. Portugal, p. 63 (1872) — Nobre, Moll. Coimbra, p. 11 (1886).

Pupa graniformis, Locard (non Drap.), Conchyl. port., p. 150 (1899).

Animal assez petit, d'un gris ou brun foncé plus clair aux flancs et au pied, qui est tronqué antérieurement et pointu en arrière, tentacules supérieurs presque cylindriques, assez longs; tentacules inférieurs très petits et coniques.

Coquille conique-fusiforme, allongée, fragile, un peu transparente, cornée, spire ornée de stries très fines, obliques et légèrement arquées; suture profonde; ouverture ovale-allongée avec une dent lamelliforme à la partie supérieure; deux à la columelle, dont l'inférieur très à l'intérieur, et trois assez longs et profonds; péristome simples peu réfléchi, interrompu sur la base du dernier tour; columelle presque droite; cavité ombilicale étroite; couleur légèrement cornée, brunâtre, hauteur 4 m.m., diam. $1\frac{1}{2}$ à $1\frac{3}{4}$ m.m.

Hab. *Douro*, Covello, pr. Porto (Luso).

Extremadura, Leiria (Luso). Coimbra (Rosa de Carvalho). Serra d'Arrabida (Nobre).

Algarve, Collines au nord de Tavira (Morelet); Faro, Estoy (Castro).

Cette espèce n'est pas rare aux environs de Setubal, près du château de S. Philippe, parmi les plantes et sous les pier-

res. Elle se distingue par sa forme fusiforme et par ses dimensions inférieures à celles de l'*avenacea*.

Chez les exemplaires que nous avons recueillis nous n'avons trouvé généralement que trois plis à l'intérieur de l'ouverture et, parfois, un quatrième réduit à un petit mamelon. Le pli inférieur de la columelle ne se distingue facilement qu'en faisant tourner la coquille de façon à laisser apercevoir bien la face interne de la columelle. La diagnose de Draparnaud mentionne deux dents supérieures, mais la gravure n'en montre qu'une seule et deux à la face interne de l'ouverture, où Moquin-Tandon en fait ressortir quatre. Chez plusieurs exemplaires provenant de l'Allemagne nous n'en avons trouvé que trois.

Sec. Pupilla, Beck

Pupa umbilicata, Draparnaud

Pl. I — Fig. 7, 8 et 9

Pupa umbilicata, Drap., Tabl. Moll., p. 58 (1801); Hist. Moll., p. 62, est. 3, f. 39-40 (1805) — Rossmässlér, Iconogr., 11, p. 15, est. 23, f. 327 (1837) — Morelet, Moll. Portugal, p. 74 (1845) — Dupuy, Hist. Moll., p. 420, pl. 20, f. 7 (1850) — Bourguignat, Malac. Algérie, p. 91, pl. 6, f. 8-16 (1864) — Hidalgo, Hojas malac., p. 18 (1870); Cat. icon., p. 217 (1875) — Luso, Moll. Portugal, p. 64 (1872) — Nobre, Moll. Coimbra, p. 11 (1886); Notas malac., III, p. 603 (1888).

Pupa cylindracea, Da Costa. — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 390, pl. 27, f. 42-43; pl. 28, f. 1-4 (1852).

Pupilla umbilicata, Drap. — Locard, Conchyl. port. p. 151 (1899).

Animal très petit, à corps étroit; pied court et elliptique; tentacules supérieurs un peu courts, cylindriques et gros, dilatés à l'extrémité oculaire; inférieurs très petits; couleur d'ardoise plus ou moins foncée à la région dorsale. L'animal marche avec la coquille haute et un peu inclinée à droite.

Coquille ovoïde-cylindracée, un peu fragile, spire composée de six tours arrondis: surface presque lisse avec des stries assez faibles et obliques; suture assez profonde, ouverture ovale-allongée, anguleuse à la base et à la partie supérieure du côté droit, où elle forme un petit sinus avec la dent insérée à la base du dernier tour; péristome épaissi, un peu dilaté et réfléchi, interrompu sur la base du dernier tour; columelle un peu arrondie; cavité ombilicale profonde et oblique; couleur marron uniforme, à l'exception du péristome qui est blanc ou légèr-

ment rosé et de la dent qui est blanche: haut. 3-4 m.m., diam. $1\frac{1}{2}$ à 2 m.m.

Hab. Tout le pays, extrêmement multiplié (Morelet).

Minho. Valença, Monsão, Vianna do Castello, Darque, Guimarães (Nobre). Famalicão (Castro, Nobre).

Traz-os-Montes. Bragança, Chaves, Vinhaes (Nobre).

Douro. Porto et environs (Luso, Nobre). Leça, sur les rochers au bord de la mer. Ermezinde, Paço de Souza, Serra do Pilar, Granja, Aveiro, Coimbra, Figueira da Foz, Luso, Bussaco (Nobre). Coimbra (Giraldes, Paz, Aguiar, Moller). Vallongo (Reis Junior). Granja (Castro). Bussaco (Paz).

Beira Alta. Mangualde, Tondella (Nobre).

Extremadura. Thomar, Azambuja, Cintra, Lisboa, Serra da Arrabida, Setubal (Nobre). Cintra, Arrabida (Paz). Monsanto (A. Furtado). Alcobaga, sur les rochers, en face du Poço de Suão; Pombal (Coll. Mus. Lisbonne).

Alentejo. Elvas (Nobre). Portalegre, Castello de Vide (Coll. Mus. Lisbonne). Beja (Nobre). Barahona, Coll. Mus. Lisbonne).

Algarve. Portimão (Coll. Mus. Porto).

Vit sur les mousses, sous les feuilles en décomposition et les pierres. Elle est, comme l'a déjà dit Morelet, une des espèces les plus répandues au pays.

Pupa muscorum (Linné)

Pl. I — Fig. 10 et 11

Turbo muscorum, Linné, Syst. Nat. éd. Gmelin, 9^e, p. 142 (1794) — Rossmässler, p. 83, pl. 2, f. 37 (1853) — Dupuy, Hist. Moll., p. 407, pl. 20, f. 10 (1850) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 392, pl. 28, f. 5-15 (1855) — Bourguignat, Malac. Algérie, p. 98, pl. 6, f. 20-24 (1846) — Luso, Moll. Portugal, p. 63 (1872).

Pupa marginata, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 58 (1801) — Hist. Moll., p. 61, pl. 3, f. 36-38 (1805).

Pupilla muscorum, Linné. — Locard, Conchyl. port., p. 152 (1899).

Animal très petit, elliptique, à pied arrondi antérieurement et pointu à l'arrière, tentacules supérieurs peu longs, cylindriques; inférieurs assez courts, cylindriques; couleur d'ardoise foncée sur le dos et la tête, plus claire aux flancs et au pied.

Coquille cylindrée, à sommet acuminé et base arrondie, un peu solide, spire composée de six à sept tours arrondis; suture assez profonde; surface presque lisse, à peine on remarque quelques rares stries obliques, fines et irrégulières;

ouverture arrondie à la base avec le bord supérieur presque droit et ayant inséré à son milieu une petite dent conique; péristome interrompu sur la base du dernier tour, peu réfléchi et presque tranchant; cavité ombilicale étroite; couleur marron plus ou moins clair; dent d'un blanc laiteux et péristome blanchâtre; haut. $3\frac{1}{2}$ m.m., diam. $1\frac{1}{2}$ m.m.

Hab. *Algarve* (Luso, Castro).

Locard cite mon nom à propos de cette espèce, mais je ne l'ai indiquée nulle part ni ne l'ai pu trouver jusqu'à présent en Portugal. D'après Locard cette espèce avait été précédemment indiquée par Schranck, et Luso da Silva, sans affirmer l'existence de cette espèce en Portugal, dit avoir trouvé, dans sa collection, plusieurs exemplaires qui lui avaient été offerts comme provenant de notre pays.

Cette espèce, par ses dimensions et sa forme générale peut, au premier abord, se confondre avec des exemplaires peu développés de *P. umbilicata*, mais celle-ci est plus conique, son ouverture plus allongée, et la dent recurvée est placée contre l'insertion du péristome. Je la cite à l'attention des naturalistes.

G. *Vertigo*, Müller

Le genre *Vertigo* comprend cinq espèces:

| | | | |
|-------------------------------|-----------------------------|---|----------------------------------|
| Plusieurs dents à l'ouverture | } <i>Vertigo</i> | Coquille ovale, épaisse, labre gros et réfléchi, deux plis et trois dents à l'ouverture | <i>V. anglica</i> (Férussac) |
| | | Coquille très petite, ovale, ventrue, péristome épais, huit dents à l'ouverture | <i>V. antivertigo</i> (Drap.) |
| | | Coquille très petite, ovale, moins ventrue, péristome moins épais, ou simples, cinq dents à l'ouverture | <i>V. pygmæa</i> (Drap.) |
| Dents nulles | } <i>Isthmia</i> , s. g. | Coquille très petite, cylindrique, péristome épais, stries assez fortes et espacées | <i>V. muscorum</i> (Drap.) |
| | | Coquille plus grande, un peu ovale, fragile, péristome simples, stries très fines et nombreuses, peu apparentes | <i>V. edentula</i> (Drap.) |

Vertigo anglica (Férussac)

Pl. I — Fig. 12 et 13

Pupa anglica, Férussac, Tabl. syst., p. 68 (1822) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 404, pl. 28, f. 34-36 (1855) — Luso, Moll. Portugal, p. 64 (1872) — Locard, Conchyl. port., p. 155 (1899).

Fertigo anglica, Férussac, — Potiez et Michaud, Cat. Moll. Mus. Douai, I, p. 195, pl. 20, f. 1-2 (1838) — Morelet, Moll. Portugal, p. 75 (1845) — Dupuy, Hist. Moll., p. 414, pl. 20, f. 9 (1850) — Hidalgo, Cat. icon., p. 273 (1875) — Nobre, Faune Tage et Sado, p. 129 (1886); Moll. Coimbra, p. 11 (1886).

Animal petit, à pied terminé en pointe émoussée, d'une couleur presque transparente, à l'exception des tentacules, de la tête et du cou qui sont d'un gris d'ardoise; tentacules supérieurs longs et cylindriques, les inférieurs réduits à des petits tubercules.

Coquille ovoïde, cylindrique, à sommet légèrement acuminé; spire composée de sept tours un peu arrondis, suture peu profonde, surface ornée de stries obliques très fines et régulières chez les individus jeunes, irrégulières et grossières chez les adultes; ouverture auriculaire; péristome interrompu sur la base du dernier tour, épais et réfléchi, ayant une dilatation sur le bord droit; un pli dentiforme à la partie supérieure, long et recourbé vers le côté droit, originant un canal arrondi avec le péristome, avec le quel il se relie à la base de celui-ci; à gauche de ce pli on en trouve un autre épais et prolongé vers l'intérieur; au bord columellaire un pli assez saillant et profond et deux autres à la base du péristome, dont celui de la droite est plus long et profond, peu apparent parfois chez quelques exemplaires; cavité ombilicale assez profonde; couleur marron rougeâtre avec une zone plus claire à la base du dernier tour; haut. 3 3 $\frac{1}{2}$ m.m., diam. 1 $\frac{1}{2}$ m.m.

Hab. *Douro*. Environs do Porto (Morelet). S. Felix da Marinha, S. Pedro da Cova, Covello (Luso); Alfena et Travagem, pr. Ermezinde, Villa Nova de Gaya, Serra do Pilar, Granja (Nobre), Bussaco (Heyden, Nobre).

Extremadura. Cintra (Morelet, Coll. Mus. Lisbonne); Jardin Botanique de Lisbonne (Nobre).

Algarve. Faro (Castro).

Vit sous les feuilles en décomposition, sous les pierres et sur les mousses humides. Cette espèce n'est pas commune.

Vertigo antivertigo (Draparnaud)

Pl. I — Fig. 14

Pupa antivertigo, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 57 (1801); Hist. Moll., p. 60, pl. 3, f. 32-33 (1805) — Morelet, Moll. Portugal, p. 74 (1845) — Dupuy, Hist. Moll., p. 417, pl. 20, f. 15 (1850) — Hidalgo, Cat. icon., p. 213 (1875).

Vertigo antivertigo, Draparnaud. — Graells, Cat. Mol. España, p. 7 (1846) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 407, pl. 29, f. 4 (1855) — Locard, Conch. port., p. 154 (1899) — Rossmässler, Iconogr., f. 647 et 1541 (1899).

Animal très petit et court; pied étroit et oblong; tentacules peu longs et gros; couleur d'ardoise foncée.

Coquille très petite ovoïde, trapue, fragile, cornée translucide; spire composée de quatre tours très arrondis; surface ornée de stries très fines, obliques, très serrées et peu apparentes; suture profonde; ouverture ovale, dilatée vers le côté droit et pourvue de huit dents, dont trois supérieures, deux plus longues et coniques, deux columellaires grosses et obtuses, trois basilaires, dont deux très longues et obtuses; péristome continu; tranchant et peu réfléchi; columelle légèrement courbe; cavité ombilicale étroite; haut. 1 1/2 m.m., diam. 1 m.m.

Hab. Douro. Foz do Douro (Castro).

Alemtejo. Prairies humides de l'Alemtejo (Morelet).

Je n'ai pu encore trouver cette petite espèce,

Vertigo pygmæa (Draparnaud)

Pl. I — Fig. 15

Pupa pygmæa, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 57 (1801); Hist. Moll., p. 60, pl. 3, f. 30-31 (1805) — Rossmässler, Iconogr., pl. 49, f. 468 (1837) — Dupuy, Hist. Moll., p. 416, pl. 20, f. 12 (1850) — Luso, Moll. Portugal, p. 64 (1872).

Vertigo pygmæa, Drap. — Graells, Cat. Mol. España, p. 7 (1846) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 405, pl. 28, f. 37-42 (1855) — Locard, Conch. port., p. 155 (1899).

Animal à corps finement rugueux, d'une couleur d'ardoise plus ou moins foncée; tentacules filiformes, noirâtres; deux tâches noires remplaçant les tentacules inférieurs.

Coquille ovoïde, très petite, fragile, un peu translucide; spire composée de cinq tours arrondis; suture profonde; surface ornée de stries très fines et peu apparentes; ouverture ova-

laire, un peu dilatée du côté droit; cinq dents dont trois à la base du péristome, un sur la columelle et l'autre au milieu de la base du dernier tour; péristome interrompu et un peu réfléchi et tranchant; cavité ombilicale étroite; couleur marron jaunâtre; péristome blanchâtre; haut. $1-1\frac{1}{2}$ m.m.; diam. 1 m.m.

Hab. *Minho*. Vianna do Castello (Nobre).

Douro. Environs de Porto, S. Felix da Marinha (Luso); Alfena et Travagem, prox. Ermezinde, Granja (Nobre); S. Felix da Marinha (Coll. Mus. Lisbonne).

D'après Luso da Silva cette espèce n'est pas rare aux environs de Porto, mais je n'ai pu me procurer qu'un petit nombre d'exemplaires.

Vit sur la mousse, les pierres et le gazon.

S. g. *Isthmia*. Gray

Vertigo muscorum (Draparnaud)

Pl. I — Fig. 16

Pupa muscorum, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 56 (1801), non Linné; Hist. Moll., p. 59, pl. 3, f. 26, 27 (1805).

Pupa minutissima, Hartman. — Hidalgo, Cat. icon., p. 215 (1875).

Vertigo minutissima, Graells, Cat. Mol. España, p. 7 (1864) Dupuy, Hist. Moll., p. 422, pl. 20, f. 13 (1850).

Vertigo muscorum, Drap. — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 399, pl. 28, f. 20-24 (1855) — Bourguignat, Malac. Algérie, 2^e, p. 98, pl. 6, f. 18-32 (1864) — Nobre, Moll. Coimbra, p. 11 (1886).

Isthmia muscorum, Drap. — Locard, Conchyl. port., p. 153 (1899).

Animal très petit, un peu rugueux, d'une couleur d'ardoise, pigmenté de noir; tentacules supérieurs assez longs et coniques.

Coquille très petite, fragile, translucide ou brunâtre, cylindrique, à sommet obtus; spire composée de six ou sept tours plus ou moins arrondis, ornée de stries assez régulièrement disposées obliquement, de gauche à droite; suture profonde; ouverture arrondie, un peu allongée vers le côté droit, dents et plis nuls; péristome interrompu sur la base du dernier tour, un peu épaissi et réfléchi; columelle réfléchie, sur la cavité ombilicale qui est étroite; haut. $1\frac{1}{2}$ à 2 m.m.; diam. 3-4 m.m.

Hab. *Traz-os-Montes* (Morelet); Macedo de Cavalleiros (Nobre).

Douro. Figueira da Foz (Nobre); Coimbra, à Baleia (Rosa de Carvalho); Coimbra, à Mont'Arroyo (J. J. Rodrigues, Coll. Mus. Lisbonne).

Extremadura. Thomar, Abrantes, Lumiar, Cruz Quebrada, Queluz, Collares, Cintra, Setubal (Nobre); Monsanto, au nord de Rabicha (A. Furtado, Coll. Mus. Lisbonne).

Alemtejo. Beja, Villa Nova de Mil Fontes (Nobre).

Algarve. (Morelet); Faro (Castro).

Très commune à Mil Fontes. Vit sous les feuilles sèches, dans les détritux végétaux et sous les pierres.

Cette espèce est variable dans sa forme. Il y a des exemplaires assez courts, à tours très arrondis, et d'autres cylindriques et plus allongés. Elle se distingue facilement par sa petitesse et par sa forme cylindrique. C'est l'espèce la plus petite des *Pupa* portugaises.

Vertigo edentula (Draparnaud)

Pl. I — Fig. 17

Pupa edentula, Draparnaud, Hist. Moll., p. 59, pl. 3, f. 28-29 (1805); Dupuy, Hist. Moll., p. 122, pl. 20, f. 17 (1850); Moquin-Tandon, Moll. France, 2^o, p. 402, pl. 28, f. 28-30 (1855); Rossmässler, Iconogr., pl. 49, f. 646 (1839); Hidalgo, Cat. icon., p. 214 (1875).

Pupa (Columella) *edentula*, Drap. — Rossmässler, Iconogr., p. 96, pl. 236, f. 4542 1543 (1899).

Isthmia edentula, Drap. — Locard, Conchyl. port., p. 153 (1899).

Animal faiblement rugueux, cendré, plus foncé à la tête et au cou, plus clair sur les flancs et au pied; tentacules longs et cylindriques; pied étroit et oblong.

Coquille ovoïde, dilatée vers la base, fragile, assez petite; spire composée de cinq à six tours très arqués; surface ornée de nombreuses stries bien marquées; ouverture petite et arrondie, sans dents ni plis, péristome simple, peu réfléchi; tranchant, interrompu sur la base du dernier tour; columelle un peu arquée, réfléchie sur la cavité ombilicale assez étroite; couleur marron clair à l'exception du péristome qui est d'une teinte jaunâtre; haut. 2 m.m.; diam. 1 1/2 m.m.

Hab. Portugal (Gyssez, *vide* Locard).

Douro. Alfena, Travagem et Ermezinde, pr. Porto (Nobre).

Algarve. Faro (Castro).

Vit sous les pierres.

Il semble que cette espèce doit être rare en Portugal.

G. Clausilia, Draparnaud

Ce genre comprend deux espèces, comme il suit:

- Coquille senestre, longue, fusiforme, épaisse, péristome réfléchi, ayant un pli à la partie supérieure, accolé à l'insertion du labre; rides nombreuses flexueuses et assez irrégulières G. rugosa, Drap.
- Coquille senestre, longue, ovale-fusiforme, épaisse, péristome réfléchi, ayant un pli à la partie supérieure accolé à l'insertion du labre et quatre plis et deux petits tubercules à la columelle; rides nombreuses flexueuses et régulièrement parallèles G. plicata (Drap.)

Clausilia rugosa, Draparnaud

Pl. II — Fig. 1 à 5

Clausilia rugosa, Draparnaud, Hist. Moll., p. 73, pl. 4, f. 19-20 (1805) — Morelet, Moll. Portugal, p. 75 (1845) — Graells, Mol. España, p. 8 (1846) — Gassies, Moll. de l'Agenais, p. 129 (1849) — Hidalgo, Hojas malac., p. 48 (1870); Cat. icon., p. 186 (1875) — Luso da Silva, Moll. de Portugal, p. 259 (1872) — Nobre, Moll. Coimbra, p. 12 (1886); Faune Tage et Sado, p. 129 (1886).

Clausilia perversa, Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 332, pl. 24, f. 24-27 (1855).

Animal à corps rugueux, court en relation à la longueur de la coquille, étroit, d'une couleur brun verdâtre sale, dos plus foncé, tentacules supérieurs peu longs, rugueux, dilatés à l'extrémité; les inférieurs très courts, réduits à des petits tubercules; pied d'une teinte ardoisée, à bord noirâtre.

Pendant la marche la coquille, qui repose sur le corps de l'animal, avance par saccades.

Coquille fusiforme, allongée, légèrement ventrue à la région moyenne, mamelonnée, spire senestre, composée de 12 à 13 tours de spire, un peu arrondis, et ornée de rides fortes, nombreuses, obliques, serrées, irrégulières, flexueuses ou presque droites, et de stries transversales parmi les rides, assez serrées parfois comme des punctuations: suture assez profonde; ouverture ovale allongée, inclinée, de gauche à droite, rétrécie à la partie supérieure; péristome continu, un peu épais, dilaté et d'un blanc jaunâtre; deux lamelles au bord droit de l'ouverture, dont l'une à la partie supérieure, étroite, presque verticale et produisant un étranglement de l'ouverture; et l'autre

placée au milieu du labre, plus épaisse et déprimée. Parmi ces deux plis on observe parfois deux petites dents: couleur brun foncé et d'un aspect satiné: haut. 12-15 m.m.; diam. $1\frac{1}{2}$ m.m.

Hab. *Minho*. Valença, Monsão, commune, Azurara (Nobre).

Traz-os-Montes. França, pr. Serra de Montesinho (Nobre).

Douro. Porto et environs (Morelet, Luso, Castro, Nobre). Leça da Palmeira, dans les fentes des falaises du rivage, près de la mer, à Boa Nova; Foz do Douro, S.^a da Hora, Serra do Pilar, Granja, Espinho, Paço de Souza, Aveiro, Bussaco, Coimbra, Figueira da Foz (Nobre). Porto, Coimbra, Bussaco (Paz). Coimbra (Moller, Heyden, Aguiar).

Extremadura. Leiria, Thomar, Collares, environs de Lisbonne (Nobre). Cintra (Morelet). Cintra. Caldas da Rainha (Hidalgo). Serra d'Arrabida (Paz).

Vit dans les lieux sombres et humides, contre les murs, sur les mousses, le tronc des arbres et sous les pierres. Vulgaire dans quelques localités.

Cette espèce est peu variable dans la forme générale; plus allongée ou raccourcie, ses caractères externes sont assez constants. Dans l'intérieur de l'ouverture on remarque à peine quelques petites différences dans le développement des lamelles et la présence ou l'absence des deux petits tubercules placés entre l'espace qui les sépare. Parfois on n'en observe qu'un seul et, généralement, ils font défaut. Chez quelques exemplaires la lamelle inférieure est bifide à l'extrémité. Par dessous cette lamelle on en observe parfois une autre et, rarement, chez quelques exemplaires existe une petite dent et, à la base de l'ouverture, un autre pli correspondant à la dépression externe de la base du dernier tour. Les différences entre cette espèce et le *C. nigricans*, sont assez faibles. Le *C. rugosa* est, peut être, plus long et étroit et les rides plus fines et serrées, en donnant à la coquille un aspect moins rugueux.

Moquin-Tandon mentionne cette espèce comme synonyme du *Turbo perversus*, Müller (v. Linné, Syst. Nat., éd. Gmelin, 9^e, p. 141, n^o 88).

Clausilia plicata (Draparnaud)

Pl II — Fig. 6 et 7

Pupa plicata, Drap., Tabl. Moll., p. 63 (1801).

Clausilia plicata, Drap., Hist. Moll., p. 72, pl. 4, f. 15, 16 (1805) — Graells, Mol. España, p. 8 (1846) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^o, p. 338, pl. 24, f. 13-16 (1855).

Clausilia portensis, Luso da Silva, Moll. de Portugal, p. 260 (1872) — Locard, Conchyl. port., p. 144 (1899).

Animal à corps rugueux, assez petit, étroit, d'un brun noirâtre en dessus, flancs et pied d'une couleur d'ardoise plus ou moins foncée, tentacules supérieurs peu longs, un peu coniques et assez dilatés à l'extrémité, les inférieurs très courts, coniques et gros.

Coquille fusiforme, allongée, ventrue à son milieu, un peu transparente et moins solide que l'espèce précédente; spire senestre, onze tours arrondis; ornée de rides flexueuses, parallèles et assez serrées; suture profonde; ouverture subquadrangulaire, légèrement inclinée de gauche à droite; péristome continu, épais, avec une gouttière à la base; une lamelle sur le bord de l'ouverture, verticale; quatre lamelles ou plis implantés sur le bord droit, dont le supérieur est le plus petit; tout près de celui-ci et à sa base on observe deux petits tubercules; couleur marron jaunâtre, péristome plus clair; haut. 18 m.m.; diam. 4 mm.

Hab. Douro. Porto, Lordello, S. Felix da Marinha (Luso, Coll. Mus. Lisbonne).

Extremadura. Thomar (Nobre).

Je n'ai pu encore trouver cette espèce aux environs de Porto. L'examen des exemplaires de la collection du Muséum de Lisbonne, recueillis et offerts par Luso da Silva, m'a permis de vérifier que l'espèce établie par ce naturaliste est de *Cl. plicata* (Drap.)

G. Balea, Leach

Ce genre ne comprend qu'une seule espèce.

Balea perversa (Linné)

Pl. II — Fig. 8 et 9

Turbo perversus, Linné, Syst. Nat. éd. Gmelin, 9^e, p. 180 (1794).

Bulinus perversus, L. — Poiret, Coquilles de l'Aisne, p. 57 (1801).

Pupa fragilis, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 64 (1801) — Hist. Moll., p. 68, pl. 4, f. 4 (1805) — Morelet, Moll. Portugal, p. 74 (1845) — Luso, Moll. Portugal, p. 62 (1872).

Balea fragilis, Drap. — Dupuy, Hist. Moll., p. 269, pl. 18, f. 5-6 (1849).

Pupa perversa, Linné — Moquin-Tandon, Moll. de France, 2^e, p. 349, pl. 25, f. 6-14 (1855).

Balea perversa, Linné — Hidalgo, Hojas malac., p. 18 (1870); Cat. iconog., p. 182 (1875) — Nobre, Moll. de Coimbra, p. 12 (1886); Faune Tage et Sado, p. 130 (1886).

Balea perversa, Linné — Locard, Conch. port., p. 116 (1899).

Animal assez grand, d'une couleur brun brunâtre à la tête et au dos, ardoisée plus ou moins foncée aux flancs et au pied, qui est terminé en pointe à l'extrémité postérieure; tentacules supérieurs assez courts et gros et un peu coniques; inférieurs très courts et coniques.

Coquille senestre, fragile, fusiforme, allongée, cornée, un peu translucide et luisante, spire à huit tours arrondis, finement striée; sommet mamelonné; suture profonde; stries légèrement inclinées de droite à gauche; ouverture ovale-allongée, labre un peu réfléchi à la partie supérieure; péristome simple, tranchant, relié sur la base du dernier tour par une faible callosité; columelle réfléchie sur la cavité ombilicale qui est circulaire et oblique. Couleur cornée-jaunâtre; columelle blanchâtre; haut. 3 m.m; diam. 2 1/2 m.m.

Hab. Provinces du nord du Portugal (Morelet).

Minho, Valença (Nobre).

Traz-os-Montes, França, prox. Serra de Montesinho (Nobre).

Douro, Porto et environs (Luso, Nobre). *Granja* (Nobre). *Coimbra* (Paz, Aguiar, Nobre). *Bussaco* (Paz, Nobre). *Anadia* (A. Giraldes).

Beira Alta, Vizeu (A. Giraldes).

Extremadura, Collares (Nobre). *Cintra* (Morelet, Paz, Nobre, coll. Mus. Lisbonne). *Caldas da Rainha* (coll. Mus. Lisbonne). *Environs de Lisbonne* (Duc de Palmella, coll. Mus. Lisbonne).

Vit sur les mousses et l'écorce des arbres, dans les fentes des rochers et des arbres. Elle est fréquente dans quelques lieux des environs de Porto, dans les fermes, les murs et les arbres des chemins.

FAM. V — STENOGYRIDÆ

Animal à corps plus ou moins long, arrondi ou tronqué à la partie antérieure, éfilé à l'extrémité caudale; mâchoire mince, plissée verticalement et à plis très nombreux et bords crénelés, radule à dent centrale très petite, latérales tricuspidées, cuspidé centrale longue et étroite; latérales subégales; marginales très courtes, transverses et tricuspidées.

Coquille plus ou moins longue, tronquée ou conique à l'état

adulte, plus ou moins luisante, conique, péristome simples, columelle plus ou moins arquée, généralement simples et parfois tronquée.

La famille *Stenogyridae* comprend trois genres et deux sous genres :

Coquille conique cylindracée, longue, à tours peu arqués, péristome simples tranchant, columelle tronquée à l'état adulte

s. g. *Rumina*, Risso.

Coquille conique ovoïde, assez petite, très brillante, cornée, polie, péristome simples, columelle arquée et pourvue d'une dent émoussée, pied muni d'une pore muqueux

Ferussacia, Risso.

Coquille plus petite, brillante, cornée, péristome épaissi, columelle presque simples; pied sans pore muqueux

s. g. *Cionella*, Jeffreys.

Coquille assez petite, étroite, subulée, fragile, blanche, transparente, à sommet arrondi, péristome simples, columelle tronquée à la base

Cœcilianella, Fér.

Stenogyra, Shuttleworth

S. g. *Rumina*, Risso

Le s. g. *Rumina* comprend une seule espèce :

Rumina decollata (Linné)

Pl. II — Fig. 10 et 11

Helix decollata, Linné, Syst. Nat., éd. X, p. 733 (1758) — Müller, Hist. Verm., 2^e, p. 114, n.^o 314 (1774) — Linné, Syst. Nat., éd. Gmelin, 9^e, p. 496, n.^o 415 (1794).

Bulimus decollatus, Linné. — Draparnaud, Hist. Moll., p. 76, pl. 4, f. 27-28 (1805) — Rossmässler, Iconogr., 5, p. 45, pl. 28, f. 1 (1837) — Morelet, Moll. Portugal, p. 73 (1845) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 311, pl. 22, f. 35-40 (1855) — Bourguignat, Malac. Algérie, 2^e, p. 3, pl. 1, f. 1-23 (1864) — Cantraine, Malac. médit., p. 135 (1865) — Luso, Moll. Portugal, p. 258 (1871) — Hidalgo, Hojas malac., p. 18 (1870); Cat. icon., p. 183 (1875).

Stenogyra decollata, Lin. — Nobre, Moll. Coimbra, p. 12 (1886); Fauna Tage et Sado, p. 129 (1886); Notas malac., 3, p. 603 (1888).

Rumina decollata, Linné. — Locard, Conch. port., p. 135 (1899).

Animal assez court, n'excédant pas, pendant la marche, l'extrémité de la coquille, d'une couleur noir d'ardoise verdâtre; tentacules supérieurs longs, les intérieurs très courts. La coquille reste appuyée sur le pied ou sur le terrain sur lequel l'animal marche.

Coquille longue, turriculée, imperforée, tronquée à l'état adulte, un peu solide, glabre et luisante; spire à quatre ou six tours peu convexes, le dernier arrondi à la base; suture peu profonde; surface de la coquille ornée de rides ou stries très fines, irrégulières et obliques; ouverture ovale; péristome tranchant et simple; columelle épaisse, légèrement arquée et réfléchie; couleur jaunâtre, brunâtre claire et parfois avec des reflets violacés: haut. 35 m.m.; diam. 14 m.m.

Hab. Région méridionale au voisinage de la mer (Morelet).

Douro. Coïmbra (Luso, Moller, Nobre, Rosa de Carvalho, Aguiar, Paulino d'Oliveira, Castro). Figueira, Buarcos, Cap Mondego (Nobre).

Beira Alta. Barca d'Alva (Reis Junior, Nobre).

Beira Baixa. Sernache (Castro).

Extremadura. Leiria (Luso, Nobre). Caldas da Rainha, Thomar, Cintra, Luniar, Sacavem, Cruz Quebrada, Belem, Algés, Cascaes (Nobre). Lisboa (Luso, Nobre, Castro). Setubal, Serra d'Arrabida (Nobre).

Alemtejo. Evora, Beja, Elvas, Odemira (Nobre). Villa Nova de Mil Fontes (G. Sampaio, Nobre).

Algarve. Faro (Castro, Nobre). Lagos, Portimão, Tavira, Villa Real de Santo Antonio (Nobre).

Comme on le voit, cette espèce ne vit pas seulement près de la mer, comme le pensait Morelet, mais on la trouve dans tout l'Alemtejo et la Beira Alta, à Barca d'Alva, frontière hispano portugaise, la région la plus septentrionale du pays où cette forme est connue jusqu'à présent. Barca d'Alva est une région très chaude pendant l'été; on y trouve diverses espèces zoologiques du sud du pays. Mr. Hidalgo indique cette espèce comme étant rencontrée par Paz, à Porto. Nous ne l'avons jamais rencontrée, et nous pensons que les exemplaires trouvés par Paz seraient portés de Barca d'Alva par le Douro, pendant les crues.

Cette espèce qui a une large distribution géographique se trouve au nord de l'Afrique et aux îles de Cap Vert; les exemplaires de cette provenance sont toujours plus petits que ceux du Portugal.

Vit sous les pierres et parmi les plantes, dans les lieux sombres.

Les jeunes, comme l'on sait, sont turriculés, plus coniques

et à spire mamelonnée. Avec l'âge cette partie terminale se détache et l'adulte ne vit que dans la coquille tronquée.

G. *Ferussacia*, Risso

Le genre *Ferussacia* ne comprend qu'une seule espèce.

Ferussacia folliculus (Gronovius)

Pl. II — Fig. 12 à 14

Helix folliculus, Gronovius. — Linné, Syst. Nat., éd. Gmelin, 9^e, p. 200, n^o 199 (1794).

Physa scaturiginum, Drap., Hist. Moll., p. 56, pl. 3, f. 14-15 jeunes (1805).

Bulimus folliculus, Gronov. — Morelet, Moll. Portugal, p. 73 (1845) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 306, pl. 22, f. 20-30 (1855).

Achatina folliculus, Gronov. — Cantraine, Malac. médit., p. 138 (1865).

Polyphemus folliculus, Gronov. — Graells, Mol. España, p. 7 (1846).

Ferussacia folliculus, Gronov. — Bourguignat, Malac. Algérie, p. 38, pl. 22, f. 20-31 (1864) — Nobre, Moll. Coïmbra, p. 12 (1886); Faune Tage et Sado, p. 130 (1886) — Locard, Conch. port., p. 137 (1899).

Animal long et étroit, à corps rugueux, d'une couleur vert jaunâtre, ou d'un jaune assez vif, plus ou moins noirâtre au cou et à la tête qui est assez longue; tentacules supérieurs assez courts et gros, rugueux; les inférieurs réduits à des tubercules assez petits; pied se terminant en pointe aigue. L'animal est assez agile et irritable. Pendant la marche la coquille s'appuie sur le long du corps.

Coquille cylindroïde, acuminée, glabre, peu solide, cornée et très luisante. Spire composée de cinq à six tours, dont le dernier, vu par sa face ventrale, est plus grand que moitié de la coquille; les autres très petits et légèrement arrondis; suture peu profonde, mais ayant un étranglement au dernier tour du côté dorsal; ouverture presque droite, ovale-allongée, anguleuse à la partie supérieure; péristome tranchant et un peu élargi au milieu, interrompu et se reliant à la columelle, qui est épaisse, par une callosité de la partie supérieure de l'ouverture. Couleur jaunâtre, cornée brillante; péristome et columelle blanchâtre; haut. 6-8 m.m.; diam. 2-3 m.m.

Hab. *Douro*, Bussaco (Paulino d'Oliveira). Environs de Coïmbra (Rosa, Nobre, Paulino, Castro).

Extremadura, Environs de Lisbonne (Mengo, coll. Mus. Lisbonne, Morelet, Servain, Luso, Nobre, Castro). Setubal (Luso, Paz, Nobre). Arrabida (Paz, Nobre, Mus. Lisbonne).

Alemtejo, Extremoz (Paz, coll. Mus. Lisbonne). Evora, Elvas, Beja (Nobre).

Algarve, Monchique, Faro, Tavira, Castro Marim (Nobre). Estoy, Faro (Castro).

Assez commun. Vit sur les plantes, sous les pierres et les feuilles en décomposition.

S. g. *Cionella*. Jeffreys

Ce s. g. ne comprend qu'une seule espèce.

Cionella subcylindrica (Linné)

Pl. II — Fig. 15 et 16

Helix subcylindrica, Linné, Syst. Nat., éd. XII, p. 1248 (1767); éd. Gmelin, 9^e, p. 197, n° 118 (1794).

Bulimus subcylindricus, Lin. — Poiret, Coq. de l'Aisne, p. 45 (1801) — Moquin-Tandon, Hist. Moll., 2^e p. 304, pl. 22, f. 15-19 (1855).

Bulimus lubricus, Draparnaud, Hist. Moll., p. 75, pl. 4, f. 24 (1805) — Gassies, Moll. Agenais, p. 122 (1849) — (Achatina, Lamk) Morelet, Moll. Portugal, p. 73 (1845).

Columna lubrica, Brug. — Graells, Mol. España, p. 7 (1846).

Ferussacia lubrica, Müller — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 187 (1875) — Nobre, Moll. Coïmbra, p. 13 (1886).

Zua subcylindrica, Lin. — Locard, Conchyl. port., p. 136 (1899).

Animal à corps rugueux, assez grand, un peu large, terminé en pointe effilée, d'une couleur d'ardcise plus ou moins foncée; tentacules supérieurs peu longs, cylindriques effilés; tentacules inférieurs très courts, gros et coniques.

Coquille petite, bulinoïde, luisante, cornée, un peu transparente, spire composée de cinq tours un peu arrondis, le dernier plus grand que tous les autres; surface de la coquille lisse; suture profonde; ouverture ovale, anguleuse vers la partie supérieure, pyriforme; péristome interrompu, épaissi; columelle légèrement inclinée, anguleuse ou réfléchie; couleur jaune cornée plus ou moins foncée, labre rosé: haut, 5-6 m.m.; diam. 3 m.m.

Hab. *Minho*. Valença (Nobre): Braga (G. Sampaio, Nobre). Famalicão (Castro).

Traz-os-Montes. Chaves (Morelet). Bragança, (Morelet, Nobre).

Douro. Porto (A. Giraldes, Nobre, Castro). Coïmbra (Rosa de Carvalho, Nobre, Castro). Soure (Nobre).

Beira Baixa. Sernache (Castro).

Vit dans les lieux humides, sur les herbes, parmi les feuilles en décomposition, etc.

G. *Cæcilianella*, Férussac

Ce genre comprend à peine une espèce.

Cæcilianella acicula (Müller)

Pl. II — Fig. 17 et 18

Buccinum acicula, Müller, Verm. hist., 2^e, p. 150 (1774).

Bulimus acicula, Müller — Draparnaud, Hist. Moll., p. 75, pl. 4, f. 25 (1805) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 309, pl. 22, f. 32-34 (1855).

Polyphemus acicula, Lamk. — Graells, Mol. España, p. 7 (1846).

Achatina acicula, Lamarck. — Dupuy, Hist. Moll., p. 327, pl. 15, f. 8 (1850) — Gassies, Moll. Agenais, p. 123 (1840).

Cæcilianella acicula, Müller. — Luso, Moll. Portugal, p. 13 (1870) — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 179 (1875) — Nobre, Moll. Coïmbra, p. 13 (1886); Faune Tage et Sado, p. 130 (1886) — Locard, Conchyl. port., p. 140 (1899).

Animal à corps finement rugueux, presque transparent, blanchâtre; tentacules supérieurs filiformes, cylindriques; tentacules inférieurs très petits, comme des tubercules.

Coquille étroite, non ombiliquée, très allongée, cylindricofusiforme; luisante, hyaline, transparente, à 5 ou 6 tours de spire à peine arqués, sommet arrondi; suture bien marquée; ouverture ovale-oblongue, à angle supérieur très aigu; columelle un peu arquée, tronquée à la base; péristome simple, tranchant, interrompu, couleur transparente, hyaline à l'état frais, blanche laiteuse lorsqu'elle est roulée; haut. 4-6 m.m.; diam. 1-1 1/2 m.m.

Hab. *Douro*. Porto, Granja, Luso (Nobre). Porto (Coll. Mus. Lisbonne). Coïmbra (J. J. Rodrigues, Coll. Mus. Lisbonne).

Extremadura. Lisbonne, Belem, Algés (Nobre). Pombal (Coll. Mus. Lisbonne).

Algarve. Faro, Estoy (Castro).

Vit sur les feuilles mortes; commune à Granja, à la base des murs des chemins.



Atto. Nogue, del.

- | | |
|--|---|
| 1, 2 — <i>Buliminus obscurus</i> , Muller. | 12, 13 — <i>Vertigo anglica</i> (Fenestae). |
| 3, 4, 5 — <i>Pupa avenacea</i> , var. <i>Luzitanea</i> , Ross. | 14 — " <i>antivertigo</i> (Draparnaud). |
| 6 — " <i>granum</i> , Draparnaud. | 15 — " <i>pygmaea</i> (Draparnaud). |
| 7, 8, 9 — " <i>umbilicata</i> , Draparnaud. | 16 — " <i>muscorum</i> (Draparnaud). |
| 10, 11 — " <i>muscorum</i> , Linne. | 17 — " <i>edentula</i> (Draparnaud). |



Aug. Nogue, del.

- 1-5 — *Clausilia rugosa*, Draparnaud.
 6-7 — " *plicata* (Draparnaud).
 8-9 — *Butea perversa* (Linné).
 10-11 — *Rumina decollata* (Linné).

- 12-14 — *Ferussacia foliivorus*, Gron.
 15-16 — *Conella subcylindrica* (Linné).
 17-18 — *Cassilianella caerulea* (Müller).

SURFACES NAUTILOÏDES

PAR

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Membre de l'Institut
Inspecteur général des Mines
Grand-Officier de la Légion-d'Honneur

(Suite)

SECONDE PARTIE

Volume, centre de gravité, moment d'inertie

§ VIII

Formules fondamentales

52. Nous entreprenons, dans cette seconde partie, d'établir pour les surfaces à front générateur, les diverses théories qui constituent la Géométrie des masses. Nous supposerons essentiellement en ce moment le front normal. Il nous sera aisé plus tard (§ XIV) d'étendre ces méthodes à un front quelconque.

J'appelle u l'élément, infinitésimal dans toutes ses dimensions, de l'aire U de la génératrice. Ses coordonnées, envisagées dans le plan de front, sont ξ et z . Je désigne par m_k le *moment d'ordre k de l'aire entière*

$$m_k = \Sigma u \xi^k,$$

pris par rapport à l'axe vertical mené par le point décrivant

Celle-ci peut s'évaluer en fonction de l'arc de la directrice $ds = MM'$, au moyen des triangles semblables CMM' , Cmm' formés par deux rayons de courbure consécutifs de cette ligne. Je désigne leur longueur par φ . Les triangles donnent alors la proportion

$$\frac{mm'}{ds} = \frac{\xi}{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{\xi}, \quad mm' = \left(1 - \frac{\xi}{\varphi}\right) ds.$$

Il vient donc

$$v = u \left(1 - \frac{\xi}{\varphi}\right) ds, \\ n_k = \sum u \left(1 - \frac{\xi}{\varphi}\right) \frac{\xi}{\varphi} ds = d \sum u \frac{\xi}{\varphi} - \frac{ds}{\varphi} \sum u \frac{\xi}{\varphi} = 1.$$

De là cette formule fondamentale

$$(30) \quad n_k = - \left(m - \frac{m-1}{\varphi} \right) ds,$$

qui relie les n aux m , pour passer des aires de la génératrice aux volumes de la surface à front générateur.

54. Nous apporterons ici une simplification essentielle en nous fondant sur la condition qui domine toutes nos théories, à savoir la similitude incessante des sections génératrices.

Marquons sur la directrice un point arbitrairement choisi, mais dorénavant immuable. Je le désignerai toujours par la lettre I, et ses coordonnées par r_1, θ_1 . A moins d'avertissement contraire, nous adopterons ordinairement pour ce point l'intersection de la courbe par l'axe polaire ($\theta_1 = 0$); et nous prendrons comme unité de longueur ($r_1 = 1$) le segment ainsi intercepté sur cet axe.

Les dimensions linéaires de la section variable U de la génératrice, sont à celles de son passage U_1 par la trace I de la directrice sur l'axe polaire, dans le rapport de $\varphi(\theta)$ à $\varphi(\theta_1)$, ou en abrégé $\frac{\varphi}{\varphi_1}$. Les éléments superficiels seront dans le rapport des carrés. On aura donc

$$\xi = \frac{\varphi}{\varphi_1} \xi_1, \quad u = \frac{\varphi^2}{\varphi_1^2} u_1, \\ \sum u \frac{\xi}{\varphi} = \frac{\varphi^3}{\varphi_1^3} \sum u_1 \frac{\xi_1}{\varphi_1}.$$

c'est-à-dire

$$(31) \quad m_k = \frac{\varphi_1^{k+2}}{\varphi_1^{k+2}} (m_k)_1.$$

Désignons par μ_k le facteur *constant*

$$\mu_k = \frac{(m_k)_1}{\varphi_1^{k+2}},$$

qui dépend de k , mais nullement de θ . Nous pourrions alors écrire simplement

$$m_k = \varphi_1^{k+2} \mu_k,$$

et la formule fondamentale (30) deviendra

$$(32) \quad n_k = \left(\mu_k + \frac{\varphi}{\rho} \mu_{k+1} \right) \varphi_1^{k+2} ds.$$

55. Ceci posé dans des termes complètement généraux, introduisons des hypothèses progressivement restrictives.

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons envisagé des surfaces vectorielles *du premier ordre*, en supposant que $\varphi(\theta)$ ne soit autre que le rayon vecteur lui-même $F(\theta)$ de la directrice. Nous appellerons plus généralement *surfaces vectorielles d'ordre p* celles pour lesquelles les dimensions de la génératrice varient comme la puissance p de ce rayon vecteur. Nous prendrons à cet effet, sans nous embarrasser de coefficients constants

$$(33) \quad \varphi(\theta) = r^p = F^p(\theta).$$

Cet ordre p sera ordinairement entier et positif; mais il peut tout aussi bien devenir fractionnaire, incommensurable, ou même négatif.

Pour $p = 1$, nous retrouverons les surfaces à proprement parler vectorielles. En faisant $p = 0$, on aura en particulier les *surfaces-tubes*, pour lesquelles la section normale à la directrice reste constante.

Avec une vectorielle d'ordre quelconque p , la formule fondamentale (32) deviendra;

$$(34) \quad n_k = \left(\mu_k + \frac{F^p}{\rho} \mu_{k+1} \right) F^{k+2p} ds.$$

56. Abandonnons le caractère vectoriel, en rendant à φ toute son indépendance; mais particularisons la directrice, en adoptant la spirale logarithmique

$$(35) \quad \mathbf{F} = e^{\Lambda\theta}, \quad \mathbf{F}' = A e^{\Lambda\theta},$$

$$ds = d\theta \sqrt{\mathbf{F}^2 + \mathbf{F}'^2} = \frac{e^{\Lambda\theta}}{\sin \alpha} d\theta,$$

$$\rho = \frac{(\mathbf{F}^2 + \mathbf{F}'^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathbf{F}^2 + 2\mathbf{F}'^2 - \mathbf{F}\mathbf{F}'} = \frac{e^{\Lambda\theta}}{\sin \alpha}.$$

L'équation fondamentale (32) devient alors

$$(36) \quad n_k = \left(\mu_k + \frac{\varphi \sin \alpha}{e^{\Lambda\theta}} - \mu_{k+1} \right) \varphi^{k+2} \frac{e^{\Lambda\theta}}{\sin \alpha} d\theta$$

$$= \left(\frac{e^{\Lambda\theta}}{\sin \alpha} - \mu_k + \varphi \mu_{k+1} \right) \varphi^{k+2} d\theta.$$

57. Réunissons maintenant les deux caractères qui viennent de nous occuper: directrice spirale et similitude vectorielle d'ordre p . Il viendra, en rendant à φ , dans la formule (36), sa valeur (33)

$$n_k = \left(\mu_k + \frac{e^{\Lambda\theta}}{e^{\Lambda\theta}} \sin \alpha \cdot \mu_{k+1} \right) e^{(k+2)\Lambda\theta} \cdot \frac{e^{\Lambda\theta}}{\sin \alpha} d\theta$$

$$= \left(\frac{\mu_k}{\sin \alpha} + e^{(p-1)\Lambda\theta} \mu_{k+1} \right) e^{(k+2)p+1)\Lambda\theta} d\theta.$$

On peut aussi mettre ce résultat sous une autre forme, en introduisant la différentielle dr au lieu de $d\theta$

$$dr = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} e^{\Lambda\theta} d\theta.$$

Il vient ainsi

$$n_k = (\mu_k + r^{p-1} \sin \alpha \cdot \mu_{k+1}) \frac{r^{(k+2)p}}{\cos \alpha} dr.$$

Pour une vectorielle ordinaire ($p=1$), ces deux formules

deviennent

$$(37) \quad \begin{aligned} n_1 &= \left(\frac{\mu_1}{\sin a} - \mu_1 - 1 \right) e^{1-\mu_1 \Lambda \theta} d\theta, \\ n_2 &= (\mu_1 - \mu_1 - 1 \sin a) \frac{r^{1+2}}{\cos a} dr. \end{aligned}$$

§ IX

Volume

58. La recherche du volume V se fera en supposant $k = 0$ dans les formules générales du § VIII.

Prenons, ainsi qu'il a été dit N° 54, le point fixe I sur l'axe polaire en supposant $\theta_1 = 0$, avec des coefficients d'homogénéité tels que $\varphi(\theta_1) = 1$. Dans ces conditions, μ_1 , ou $\frac{m_1-1}{\varphi_1^2}$, se réduit à l'aire U_1 que présente la section génératrice lors de son passage en I .

Quant à μ_1 , c'est alors le moment $U_1 \xi'_1$ de cette aire par rapport à la verticale de I , en appelant, pour cette situation spéciale, ξ'_1 l'abscisse (prise par rapport à I dans le front normal F_1) du centre de gravité de l'aire U_1 .

De son côté n_1 est le volume dV de la tranche, et la formule générale (32) devient dans ces conditions

$$(38) \quad dV = \left(1 + \frac{\varphi}{\rho} \xi'_1 \right) U_1 \varphi^2 ds,$$

c'est-à-dire finalement

$$(39) \quad \frac{dV}{d\theta} = \frac{U_1 \varphi^2}{F^2 - F'^2} (F^2 + F'^2)^{\frac{1}{2}} + \xi'_1 \varphi (F^2 + 2F'^2 - FF'').$$

Le problème se trouve ainsi ramené aux quadratures.

Envisageons quelques applications.

59. *Surfaces de révolution.* — Nous obtiendrons une vérification en prenant comme directrice un cercle concentrique à l'origine

$$F = 1, \quad F' = F'' = 0,$$

avec une génératrice constante

$$\varphi = 1.$$

La formule (38) devient :

$$dV = (1 + \xi'_1) U_1 d\theta, \quad V = (1 + \xi'_1) U_1 \theta.$$

Or ξ'_1 désigne la distance du centre de gravité de l'aire génératrice U_1 à la trace I , et par suite $1 + \xi'_1$ sa distance à l'axe de rotation. Le produit $(1 + \xi'_1)\theta$ est donc l'arc de cercle décrit par ce centre de gravité pendant que l'aire U_1 engendre un onglet de ce corps de révolution. Nous retrouvons ainsi le théorème de GULDIN.

60. Surfaces-tubes. — Conservons la génératrice constante $\varphi = 1$, mais avec une directrice quelconque. La formule (38) s'écrira

$$dV = \varepsilon ds + \xi'_1 d\varepsilon U_1,$$

si nous appelons ε l'angle de contingence de cette courbe. On aura d'après cela

$$V = U_1 s + U_1 \xi'_1 \varepsilon.$$

Le volume de la surface-tube s'exprime donc par la somme de deux autres, à savoir : 1° le produit de l'aire constante par l'arc que décrit sur la directrice celui de ses points qui guide le mouvement normalement à cette courbe ; 2° le produit de cette même aire par l'arc de cercle que décrirait son centre de gravité en tournant de l'angle total de contingence autour de l'axe mené par le point décrivant perpendiculairement au plan de la directrice (1).

61. Surfaces de gyration. — Je désigne ainsi les surfaces engendrées par la rotation d'un profil méridien dont un point décrit un cercle, mais qui, au lieu de rester invariable, comme pour les corps de révolution, se modifie homothétiquement par rapport à ce point d'après la loi $\varphi(\theta)$.

Prenons pour unité le rayon ρ du cercle qui sert de directrice. Son arc ds sera mesuré par $d\theta$, et la formule (38) de-

(1) Voy. le mémoire de M. KLEIN sur les surfaces-tuyaux.

viendra

$$dV = (1 + \xi'_1 \varphi) U_1 \varphi^2 d\theta,$$

d'où en intégrant

$$V = U_1 \int \varphi^2(\theta) d\theta + U_1 \xi'_1 \int \varphi^3(\theta) d\theta.$$

Je ne m'arrêterai pas à des applications particulières.

62. Spirales sinusoides. — Envisageons comme directrice la spirale sinusoïde

$$r^n = C^n \cos n\theta,$$

d'ordre quelconque n

$$F = C \cos^{\frac{1}{n}} n\theta, \quad F' = -C \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta \sin n\theta,$$

$$\sqrt{F^2 + F'^2} = C \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta.$$

Nous laissons la génératrice quelconque. Toutefois, pour simplifier les résultats, nous la supposons *centrée*, c'est-à-dire décrivant la directrice, soit par son centre de gravité lui-même, soit par la projection équatoriale de ce point. En un mot : $\xi'_1 = 0$.

Nous admettrons en outre la similitude vectorielle d'ordre quelconque p . La relation (38) donne alors :

$$dV = U_1 \left(\frac{r}{C} \right)^{2p} ds,$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{U_1}{C^{2p}} \sqrt{F^2 + F'^2} = U_1 C \cos^{\frac{2p-n+1}{n}} n\theta,$$

$$V = U_1 C \int_0^\theta \cos^{\frac{2p-n+1}{n}} n\theta \cdot d\theta,$$

en intégrant depuis l'axe polaire ($\theta = 0$, $r = C$) jusqu'à un azimut quelconque.

On peut en particulier, lorsque n est positif, intégrer jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2n}$; ce qui correspond à $r = 0$, en embrassant une demi-boucle de la directrice.

63. Quel que soit l'ordre n , nous pouvons réussir l'intégra-

tion en employant une loi vectorielle toujours la même, à savoir la variation des dimensions de la génératrice en raison inverse de la moyenne géométrique entre le rayon vecteur et la longueur qui sert d'unité.

Cet énoncé donne en effet :

$$p = -\frac{1}{2}, \quad \frac{2p - n + 1}{n} = -1,$$

$$V = U_1 C \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos n\theta} = \frac{U_1 C}{n} \text{Log tang} \left(\frac{n\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

On peut notamment appliquer ce résultat aux directrices très simples :

- $n = -2$, Hyperbole équilatère, rapportée à son centre,
- -1 , Ligne droite quelconque,
- $-\frac{1}{2}$, Parabole, rapportée à son foyer,
- $+\frac{1}{2}$, Cardioïde, rapportée à son rebroussement,
- $+1$, Cercle, rapporté à un de ses points,
- $+2$, Lemniscate de BERNOULLI, rapportée à son centre.

64. Posons maintenant

$$(40) \quad \frac{2p - n + 1}{n} = N, \quad (N + 1)n - 2p = 1,$$

$$V = U_1 C \int_0^{\theta} \cos^N n\theta d\theta = \frac{U_1 C}{n} \int_0^{n\theta} \cos^N z dz.$$

Attribuons par la pensée à N diverses valeurs déterminées arbitrairement; puis, pour chacune d'elles, faisons varier corrélativement n et p de manière à satisfaire par leurs couples de valeurs simultanées à la condition (40). Si nous conservons à l'azimut θ une même valeur pour former la limite de l'intégration, l'on voit que la différentielle, et par suite l'intégrale définie, resteront identiques pour ces diverses hypothèses. De là une infinité de familles (de paramètre N) composées chacune d'une infinité de surfaces (de paramètres conjoints n, p) lesquelles,

bien que profondément différentes les unes des autres par la forme, présentent cette propriété remarquable d'avoir toutes, pour le même azimut limite θ , un même volume, dont la valeur ne varie que d'une famille à l'autre avec N .

On pourrait même, toutes les fois que N recevra une valeur commensurable, employer l'analyse indéterminée du premier degré à chercher pour n et p des systèmes de valeurs entières qui satisfassent à l'équation (40), de manière à obtenir des spirales sinusoides et des lois vectorielles simples.

Les systèmes de valeurs de n et p qui satisfont à la condition (40) pour une famille déterminée N , se groupent deux par deux pour des valeurs de n égales et de signes contraires. Elles correspondent à des spirales sinusoides transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques, et respectivement associées aux lois vectorielles

$$p = \frac{(N+1)n-1}{2}, \quad p' = -\frac{(N+1)n+1}{2},$$

qui satisfont à la relation

$$p+p' = -1.$$

Il s'attachera de même un intérêt spécial aux familles d'ordre N entier et de signe quelconque; car l'intégration peut alors toujours s'effectuer entièrement par les méthodes classiques. J'indiquerai à cet égard les cas les plus simples.

65. Supposons en premier lieu

$$N=0: \quad p = \frac{n-1}{2}, \quad n=2p+1;$$

et considérons comme exemple dans cette famille le cercle passant par le pôle ($n=1$). Il s'ensuit: $p=0$, c'est-à-dire la loi vectorielle des surfaces-tubes. On obtient ainsi un anneau engendré par la révolution d'une aire quelconque, dont le centre de gravité parcourt un cercle. La formule (40) donne alors

$$V = U_1 C \theta.$$

Dans cette expression C désigne le diamètre du cercle, et θ l'angle inscrit. $C\theta$ est donc le produit du rayon par l'angle au centre, c'est-à-dire l'arc du cercle directeur. D'ailleurs U_1 re-

présente l'aire génératrice. On retrouve donc le théorème de GULDIN.

66. Soit en second lieu

$$N = 1; \quad p = n - \frac{1}{2}, \quad n = p + \frac{1}{2};$$

$$V = U_1 C \int_0^{\theta} \cos n\theta d\theta = \frac{U_1 C}{n} \sin n\theta.$$

Comme premier exemple dans cette seconde famille, considérons la parabole rapportée à son foyer

$$n = -\frac{1}{2}, \quad p = -1; \quad V = 2U_1 C \sin \frac{\theta}{2}.$$

La similitude de la section génératrice doit alors se régler en raison inverse du rayon focal. Si l'on étend l'intégration jusqu'à $\theta = \pi$, il vient pour le volume du demi-solide indéfini

$$V' = 2U_1 C,$$

et pour le corps entier

$$V'' = 4U_1 C.$$

Prenons comme second exemple de cette même famille la cardioïde

$$n = \frac{1}{2}, \quad p = 0,$$

surface-tube dont la directrice est conjuguée de la précédente par rayons vecteurs réciproques, et donne les mêmes formules.

67. Envisageons encore la famille de surfaces

$$N = 2; \quad p = \frac{3n-1}{2}, \quad n = \frac{2p+1}{2};$$

$$V = U_1 C \int_0^{\theta} \cos^2 n\theta d\theta = \frac{U_1 C}{2} \int_0^{\theta} (1 + \cos 2n\theta) d\theta$$

$$= \frac{U_1 C}{4n} (2n\theta + \sin 2n\theta).$$

Comme premier exemple, prenons le cercle passant par le pôle

$$n = 1, \quad p = 1; \quad V = \frac{U_1 C}{4} (2\theta - \sin 2\theta).$$

La surface est purement vectorielle, et nous retrouvons l'anneau variable à section normale (N° 48). Le volume du corps entier (pour $\theta = \pi$) est le suivant

$$V' = \frac{\pi U_1 C}{2},$$

c'est-à-dire le produit de l'aire génératrice par la moitié de la circonférence directrice.

La surface conjuguée sera, en changeant le signe de n

$$n = -1, \quad p = -2.$$

Sa directrice est une ligne droite. Les dimensions de la génératrice varient en raison inverse du carré du rayon vecteur, et par conséquent son aire en raison inverse de la quatrième puissance. Le solide, quoique infini en longueur, comme celui que nous avons dérivé de la parabole, reste, ainsi que ce dernier, de volume fini, représenté par la formule précédente.

68. Je prendrai une dernière application parmi les valeurs négatives de N . L'hypothèse $N = -1$ serait précisément celle qui a permis de réussir l'intégration (N° 63), pour une valeur tout-à-fait quelconque de n , avec la loi spéciale $p = -\frac{1}{2}$. Il n'y a pas à y revenir.

Passons donc à la valeur

$$N = -2; \quad p = -\frac{n+1}{2}, \quad n = -(2p+1);$$

$$V = U_1 C \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2 n\theta} = \frac{U_1 C}{n} \tan n\theta.$$

Comme premier exemple dans cette dernière famille, envisageons le cercle

$$n = 1, \quad p = -1; \quad V = U_1 C \tan \theta.$$

Les dimensions de la génératrice varient en raison inverse du

rayon vecteur; et l'on obtient une sorte de conque évasée en forme de cor. Son volume total serait infini; mais on peut le déduire de la formule précédente pour un azimut poussé aussi près que l'on voudra de π .

La figure conjuguée

$$n = -1, \quad p = 0,$$

correspond à une directrice rectiligne, avec section constante. C'est donc un cylindre quelconque à bases parallèles; et son volume connu nous fournit une vérification de la formule précédente.

69. Surfaces nautiloïdes. — Arrivons enfin à l'objet principal de ces études: les surfaces nautiloïdes, à front normal, directrice spirale et similitude vectorielle ordinaire ($p = 1$). La génératrice reste quelconque; et c'est à titre particulier que l'on pourra invoquer, pour le nautilé à front circulaire normal (N^o 49), le résultat général que nous allons formuler.

La relation (37) donne alors, pour $k = 0$

$$dV = n_0 = (\mu_0 + \mu_1 \sin \alpha) \frac{r^2 dr}{\cos \alpha}.$$

d'où⁽¹⁾, en intégrant à partir du pôle ($r = 0$).

$$V = \frac{U_1}{3 \cos \alpha} (1 + \frac{\mu_1}{\mu_0} \sin \alpha) r^3.$$

Il ne faut pas perdre de vue que cette formule totalise le volume de toutes les spires consécutives, qui parfois se pénètrent mutuellement dans une même portion de l'espace. Mais il est facile de s'affranchir de cette complication. Il suffit à cet égard de se limiter à l'évaluation d'un tronçon d'amplitude inférieure à 2π . Il sera la différence de deux expressions sem-

(1) Dans cette formule, et toutes les suivantes relatives aux surfaces nautiloïdes, a disparu l'homogénéité, que nous avons au contraire mise en évidence pour les spirales sinusoides; attendu que l'équation (35) de la spirale logarithmique suppose que l'on a pris pour unité la longueur OI interceptée sur l'axe polaire.

blables à la précédente; et dans cette soustraction la partie compliquée aura identiquement disparu.

Supposons en particulier une génératrice centrée sur la verticale du point décrivant ($\zeta'_1 = 0$). Il vient alors plus simplement, pour le volume compté à partir du pôle

$$V = \frac{U_1}{3 \cos a} r^3,$$

et pour un tronçon limité $M'M''$

$$V'' - V' = \frac{U_1}{3 \cos a} (r''^3 - r'^3) = \frac{r'' - r'}{\cos a} \cdot \frac{U_1 (r'^2 + r''^2 + r' r'')}{3}.$$

Or $\frac{r}{\cos a}$ représente l'arc s de la spirale logarithmique compté à partir du pôle, et $U_1 r^2$ mesure la section U au point quelconque M de rayon r . On peut donc écrire

$$V'' - V' = (s'' - s') \frac{U' + U'' + \sqrt{U' U''}}{3}.$$

D'après cela, le volume d'un tronc limité de nautiloïde à front normal quelconque, mais centré, est le produit de l'arc de spirale que décrit le centre de gravité de l'aire, par la moyenne arithmétique de la grande base, de la petite base, et d'une moyenne géométrique entre ces deux bases.

§ X

Centres de gravité

70. La recherche du centre de gravité (c'est-à-dire celle du moment du premier ordre) se fera en supposant dans les formules générales du § VIII, $k = 1$. Les coordonnées de ce centre sont en effet le quotient par V (dont nous possédons maintenant l'expression) des moments Σvx , Σvy , Σvz . Nous reprenons d'ailleurs une entière généralité pour les trois fonctions F , f , ζ .

Nous poserons d'abord des formules fondamentales (fig. 9)

$$x = Op = OM \cos MOA + Ma \cos (MOA - kMO)$$

$$= r \cos \theta + \frac{z}{\varphi} \cos \left| \theta - \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \right|,$$

c'est-à-dire

$$(41) \quad x = r \cos \theta + \frac{z}{\varphi} \sin (\theta + a),$$

et de même

$$(42) \quad y = r \sin \theta - \frac{z}{\varphi} \cos (\theta + a).$$

Prenons d'après cela le moment relatif au plan YOZ, qui nous fournira l'abscisse du centre de gravité⁽¹⁾,

$$d\Sigma r x = r \cos \theta \Sigma v + \sin (\theta + a) \Sigma v \frac{z}{\varphi} = n_0 r \cos \theta + n_1 \sin (\theta + a)$$

$$= \left(m_0 + \frac{m_1}{\varphi} \right) r \cos \theta ds + \left(m_1 + \frac{m_2}{\varphi} \right) (\sin \theta . ds \cos a + \cos \theta . ds \sin a)$$

$$= \left(\mu_0 + \frac{z}{\varphi} \mu_1 \right) \varphi^2 r \cos \theta ds + \left(\mu_1 + \frac{z}{\varphi} \mu_2 \right) \varphi^3 (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta).$$

Nous aurons donc, en divisant par θ

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \Sigma r x &= \mu_0 \varphi^2 r \cos \theta \frac{ds}{d\theta} \\ &+ \mu_1 \varphi^3 \left(\frac{r}{\varphi} \cos \theta \frac{ds}{d\theta} + r \cos \theta + \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \right) \\ &+ \mu_2 \varphi^4 \left(r \cos \theta + \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \right). \end{aligned}$$

(1) Je crois devoir signaler à l'attention que, dans cette formule, et pour un grand nombre des suivantes, le signe de sommation Σ s'étend dans le premier membre à tout l'ensemble du corps considéré et, dans le second, seulement à la tranche infinitésimale. C'est au fond le $d\Sigma$ du premier membre qui équivaut aux Σ du second; les deux membres des équations se rapportant, bien entendu, au même système matériel.

On trouverait par une marche semblable (42)

$$(44) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} \Sigma v y - \mu_0 \varphi^2 r \sin \theta \frac{ds}{d\theta} \\ & + \mu_1 \varphi^3 \left(\frac{r}{\rho} \sin \theta \frac{ds}{d\theta} + r \sin \theta - \frac{dr}{d\theta} \cos \theta \right) \\ & + \mu_2 \varphi^4 \left(r \sin \theta - \frac{dr}{d\theta} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

71. Envisageons en troisième lieu l'altitude z . Il vient à cet égard (N° 54)

$$d\Sigma v z = \Sigma u z \left(1 + \frac{\xi}{\rho} \right) ds = ds \Sigma u z + \frac{ds}{\rho} \Sigma u z \xi.$$

Nous avons représenté ci-dessus par m_1, m_2, \dots , les intégrales $\Sigma u \xi, \Sigma u \xi^2, \dots$, fonctions de la seule abscisse ξ de l'élément u . Désignons de même par l_1, l_2, \dots , les intégrales $\Sigma u z, \Sigma u z^2, \dots$, fonctions de l'altitude z uniquement; et encore par l_2 l'intégrale $\Sigma u z \xi$ qui dépend à la fois des deux coordonnées. Ces symboles représentent, au même titre que les précédents m , des quantités qui doivent être considérées comme connues d'après l'équation de la génératrice (§ XIV).

De plus nous poserons, comme au N° 55, en nous rapportant au même point arbitraire I

$$l_k = \frac{\varphi^{k+2}}{\varphi_1^{k+2}} (l_k)_1 = \lambda_k \varphi^{k+2}, \quad \lambda_k = \frac{(l_k)_1}{\varphi_1^{k+2}}.$$

Il viendra dans ces conditions

$$(45) \quad \frac{d}{d\theta} \Sigma v z = \left(\lambda_1 + \frac{\varphi}{\rho} \lambda_2 \right) \varphi^3 \frac{ds}{d\theta}.$$

En substituant dans les formules générales (43), (44), (45), les expressions classiques de $\frac{ds}{d\theta}$ et ρ , nous posséderons donc en fonction de $\theta, \varphi, F, F', F''$ les dérivées par rapport à θ des moments relatifs aux trois plans coordonnés, et le problème se trouve ainsi ramené aux quadratures.

72. Attachons nous spécialement au cas des surfaces nauti-

loïdes, pour lesquelles nous avons

$$p = 1, \quad \varphi = F, \\ r = e^{A\theta}, \quad \frac{dr}{d\theta} = Ae^{A\theta}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \frac{r}{\sin a}, \quad \varrho = \frac{r}{\sin a}.$$

Il vient alors (43), avec une valeur constante pour a

$$\frac{d\Sigma vx}{d\theta} = \mu_0 r^4 \frac{\cos \theta}{\sin a} + \mu_1 r^4 \left(2 \cos \theta + \frac{\cos a}{\sin a} \sin \theta \right) \\ + \mu_2 r^4 \sin a \left(\cos \theta + \frac{\cos a}{\sin a} \sin \theta \right),$$

et par suite:

$$\Sigma vx = \left(\frac{\mu_1}{\sin a} + \mu_2 \right) \cos a \int_{-\infty}^{\theta} e^{4A\theta} \sin \theta d\theta \\ + \left(\frac{\mu_0}{\sin a} + 2\mu_1 + \mu_2 \sin a \right) \int_{-\infty}^{\theta} e^{4A\theta} \cos \theta d\theta.$$

Rien ne serait plus facile que de transcrire le résultat de ces intégrations, qui sont classiques: mais nous pouvons en simplifier l'expression de la manière suivante.

Le centre de gravité du volume, étendu depuis le pôle jusqu'au front normal mené par le point décrivant M. d'azimut θ , fait, d'après la similitude fondamentale, partie de l'édifice géométrique dont ce point est le directeur. Il suffit donc de déterminer la position de ce centre dans l'édifice pour un seul instant: par exemple pour le point de repère I, qui a été choisi sur l'axe polaire. Le centre G occupera ensuite, par rapport au terminus quelconque OM, une position homothétique de celle que présente ce dernier G₁ relativement à OI.

En un mot, il nous suffit d'intégrer, non plus de $-\infty$ à θ , mais de $-\infty$ à zéro. Ces quadratures, qui ont naturellement des expressions plus simples que les précédentes sont

$$\int_{-\infty}^0 e^{4A\theta} \sin \theta d\theta = - \frac{\sin^2 a}{1 + 15 \cos^2 a},$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{4A\theta} \cos \theta d\theta = \frac{1 \sin a \cos a}{1 + 15 \cos^2 a}.$$

et nous donnent

$$(1 + 15 \cos^2 a) (\Sigma vx)_1 = - \sin^2 a \cos a \left(\frac{\mu_1}{\sin a} + \mu_2 \right) \\ + 4 \sin a \cos a \left(\frac{\mu_0}{\sin a} + 2\mu_1 + \mu_2 \sin a \right),$$

c'est-à-dire finalement

$$(1 + 15 \cos^2 a) (\Sigma vx)_1 = 4\mu_0 \\ + \mu_1 \sin a (8 - \cos a) + \mu_2 \sin a (4 \sin a - 1).$$

On trouvera de même (14)

$$(1 + 15 \cos^2 a) (\Sigma vy)_1 = - \mu_0 \sin a \\ - 2\mu_1 (1 + \cos^2 a) - \mu_2 \sin a (1 + 3 \cos^2 a).$$

En ce qui concerne le troisième moment, il nous vient (15)

$$\frac{d}{d\theta} \Sigma vz = (\lambda_1 + \lambda'_2 \sin a) \frac{r^4}{\cos a}. \\ \Sigma vz = \frac{\lambda_1 + \lambda'_2 \sin a}{\cos a} \int_{-\infty}^{\theta} e^{4\Lambda\theta} d\theta = \frac{\sin a}{4 \cos^2 a} (\lambda_1 + \lambda'_2 \sin a) e^{4\Lambda\theta},$$

et en particulier pour le point I

$$(\Sigma vz)_1 = \frac{\sin a}{4 \cos^2 a} (\lambda_1 + \lambda'_2 \sin a).$$

§ XI

Lieux géométriques de centres de gravité

73. Proposons nous la recherche du lieu géométrique du centre de gravité, lorsque vient à se mouvoir le point décrivant, terminus d'un tronçon variable. Nous distinguerons à cet égard trois problèmes différents.

Nous pouvons en effet envisager: 1° le lieu du centre de gra-

Il vient donc

$$(47) \quad r' = \sqrt{r^2 + \xi'^2 + 2r\xi' \frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}}}.$$

En remplaçant r par F , et ξ' par l'expression (46), nous aurons celle de r' en fonction de θ .

Le même triangle donne en second lieu

$$\frac{\sin MO\gamma_0}{M\gamma_0} = \frac{\sin OM\gamma_0}{O\gamma_0},$$

c'est-à-dire

$$(48) \quad \sin(\theta - \theta') = \frac{\xi'}{r'} \cos \alpha = \frac{\xi'}{r'} \frac{dr}{ds} = \frac{\xi'}{r'} \frac{F'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

En substituant pour ξ' et r' les valeurs (46) et (47), nous obtenons celle de θ' en fonction de θ .

L'élimination du paramètre θ entre les expressions (47) et (48) fournira, avec les coordonnées polaires, r' , θ' , l'équation du lieu géométrique de la projection équatoriale γ_0 du centre γ .

Quant à l'altitude z' de ce dernier, elle participe à la similitude générale dont le rapport régulateur est φ . On a donc, en se repérant au point I

$$\frac{z'}{z_1} = \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(\theta_1)}.$$

En adjoignant cette relation aux deux précédentes (47) et (48) pour l'élimination de θ , l'on obtiendra entre r' , θ' , z' les deux équations du lieu géométrique du centre de gravité γ dans l'espace.

75. Passons au second problème, en envisageant, à la place de γ , le centre de gravité g du volume de la tranche infinitésimale.

Désignons par r'' , θ'' , z'' ses coordonnées, et par ξ'' son abscisse dans la section frontale par rapport au point directeur M. Si l'on remplace, sur la figure 10, γ_0 par g_0 , projection de g , il n'y aura rien à changer pour la marche des calculs, si ce n'est que, dans la relation (46), les intégrales m , relatives à l'aire sans épaisseur, doivent être remplacées par les n , qui se rapportent au

volume de la tranche. Il vient ainsi :

$$(49) \quad \frac{z''}{n_0} = \frac{m_1 + \frac{m_2}{\rho}}{m_0 + \frac{m_1}{\rho}} = \frac{\mu_1 \varphi^3 + \frac{\mu_2 \varphi^4}{\rho}}{\mu_0 \varphi^2 + \frac{\mu_1 \varphi^3}{\rho}} = \varphi \frac{\mu_1 \rho + \mu_2 \varphi}{\mu_0 \rho + \mu_1 \varphi}.$$

En substituant (49) à (46), on n'aura qu'à conduire des éliminations semblables pour obtenir entre (r'', θ'') , ou entre (r'', θ'', z'') les équations respectives du lieu géométrique de g_0 sur l'équateur, ou de g dans l'espace.

76. La modification sera plus profonde pour la troisième question. En effet G ne se trouve plus dans le plan de front, comme g et comme γ . Nous appellerons (r''', θ''', z''') ou (x''', y''', z''') , ses coordonnées.

Une première méthode consistera simplement à éliminer θ entre les expressions qui nous sont connues (43), (44), (45) et (39)

$$x''' = \frac{\Sigma vx}{V}, \quad y''' = \frac{\Sigma vy}{V}, \quad z''' = \frac{\Sigma vz}{V}.$$

En les envisageant toutes les trois à la fois, on obtiendra les deux équations du lieu de G dans l'espace. Si l'on se borne aux deux premières, elles fourniront celle du lieu de sa projection G_0 dans le plan de l'équateur.

Mais nous pouvons d'autre part rattacher cette recherche à des aperçus tout différents.

77. Si l'on décompose un système matériel quelconque en diverses parties, pour condenser en leurs centres de gravité respectifs leurs masses individuelles, on constitue par là un système fort différent, dont le centre de gravité est néanmoins resté le même.

Appliquons ici ce principe, et condensons au centre de gravité g de l'une des tranches élémentaires sa masse dV , en la répartissant sur l'arc infinitésimal ds'' qui en traverse l'épaisseur le long du second des lieux géométriques que nous avons appris à déterminer (N° 75). Si l'on fait cette opération pour toutes les tranches, cette ligne s'' se trouvera transformée en un

système matériel de densité variable $\frac{dV}{ds''}$; lequel aura le même centre de gravité G que le volume du tronçon V correspondant aux mêmes limites.

Or la formule (38) nous donne

$$dV = \left(\mu_0 + \mu_1 \frac{z}{\rho} \right) \varphi^2 ds,$$

en fonction de θ et $d\theta$, et par suite aussi en θ'' et $d\theta''$ d'après les éléments de l'élimination relative à la seconde question. L'arc ds'' nous est connu de même en θ'' et $d\theta''$. La densité le sera donc de son côté en θ'' , ou si l'on veut en s'' .

Le troisième problème se trouve ainsi ramené à cette autre recherche d'ordre général: trouver le centre de gravité d'une courbe dont la densité variable est exprimée en fonction de son arc. Les coordonnées de G seront ainsi obtenues en fonction de s'' , ou de θ'' , et l'élimination du paramètre auxiliaire, conduite comme au N° 76, en fera connaître le lieu géométrique.

78. Cette méthode peut être employée pour les surfaces nautiloïdes.

A la vérité la remarque invoquée ci-dessus (N° 72) que les centres de gravité γ , g , G sont liés à l'édifice géométrique, suffit alors à nous montrer a priori que leurs lieux géométriques sont des conhélices; mais nous ne saurions nous en tenir à ce simple aperçu, et nous poursuivrons leur détermination complète. Je me bornerai toutefois à la recherche du lieu G , qui exige la connaissance préalable de celui de g ; mais nous ne nous arrêterons pas au lieu géométrique de γ , qui s'obtiendrait d'une manière toute semblable.

Nous avons d'après les formules (35), (49), (47)

$$\gamma'' = r \frac{\frac{\mu_1}{\sin a} + \mu_2}{\frac{\mu_0}{\sin a} + \mu_4} = r \frac{\mu_1 + \mu_2 \sin a}{\mu_0 + \mu_4 \sin a}, \quad r'' = \frac{j r}{\mu_0 + \mu_4 \sin a},$$

si nous employons l'abréviation j pour désigner le radical

$$j = \sqrt{(\mu_0 + \mu_4 \sin a)^2 + (\mu_1 + \mu_2 \sin a)^2} \div 2(\mu_0 + \mu_4 \sin a)(\mu_1 + \mu_2 \sin a) \sin a.$$

Il nous vient d'autre part (48)

$$\sin(\theta - \theta'') = \frac{z''}{r''} \cos a = \frac{\cos a}{j} (\mu_1 + \mu_2 \sin a),$$

$$\theta'' = \theta - \arcsin \left[\frac{\cos a}{j} (\mu_1 + \mu_2 \sin a) \right],$$

et par conséquent, en éliminant θ entre ces deux valeurs

$$r'' = e^{\Lambda(\theta'' + \delta)},$$

si l'on fait pour abréger

$$\delta = \arcsin \left[\frac{\cos a}{j} (\mu_1 + \mu_2 \sin a) \right] + \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \left[\frac{j}{\mu_0 + \mu_1 \sin a} \right].$$

Le lieu de la projection g_0 du centre de gravité g des tranches infinitésimales est donc une spirale logarithmique égale à la directrice, mais déviée de l'angle δ .

Quant à l'altitude z'' de g , elle est donnée par la formule suivante, semblable à (49)

$$z'' = \varphi \frac{k_1 \varrho + k_2 \varphi}{\mu_0 \varrho + \mu_1 \varphi},$$

d'où, en remplaçant φ par r , et ϱ par $\frac{r}{\sin a}$

$$z'' = r \frac{k_1 + k_2 \sin a}{\mu_0 + \mu_1 \sin a},$$

c'est-à-dire

$$z'' = \frac{k_1 + k_2 \sin a}{\mu_0 + \mu_1 \sin a} e^{\Lambda \left\{ \theta'' - \arcsin \left[\frac{\cos a}{j} (\mu_1 + \mu_2 \sin a) \right] \right\}}.$$

z'' est donc proportionnel à r'' , et par conséquent, dans l'espace, le lieu de g est la cônehélice qui a pour équation

$$z'' = (k_1 + k_2 \sin a) r''.$$

79. Cette ligne conservant une inclinaison constante sur l'horizon, si, après y avoir réparti la masse des tranches qu'elle

traverse, on rabat verticalement toutes ces masses sur la projection équatoriale, on constituera une spirale logarithmique matérielle possédant, en fonction de son propre arc, une loi de densité identique à celle de la cônehlice. Le centre de gravité G de cette dernière se trouvera donc sur la verticale de celui de cette spirale logarithmique.

Si d'un autre côté, en reprenant sur la cônehlice les masses qu'on y avait réparties, on les transporte horizontalement sur cette verticale, cette opération ne changera pas le centre de gravité cherché. Il n'est donc autre finalement que celui de cette droite hétérogène. Mais les arcs de cônehlice sont, d'après la constance de son inclinaison, proportionnels à ces éléments de verticale. La densité de cette dernière suivra donc encore, en fonction de l'altitude, la même loi que celle de la spirale en fonction de son arc.

Or l'élément infinitésimal du troisième ordre v est proportionnel à uds , par suite à $r^2 dr$, à $r'^2 dr'$, ou encore à $s_0'^2 ds_0''$ sur la spirale, et à $z''^2 dz''$ pour la verticale. La densité varie donc sur ces deux lignes en raison de $s_0''^2$ et de z''^2 .

En ce qui concerne la verticale, l'altitude z'' du centre de gravité G s'obtiendra d'après cela immédiatement

$$z''' = \frac{\int_0^{z''} h^2 dh \cdot h}{\int_0^{z''} h^2 dh} = \frac{3}{4} z''.$$

Quant à la spirale logarithmique, j'ai traité dans une autre occasion (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome cxlii, page 1174) de la recherche du lieu géométrique des centres de gravité de cette courbe lorsque sa densité varie en raison d'une puissance quelconque de son arc, entière, fractionnaire ou incommensurable, positive ou négative. J'ai montré alors ⁽¹⁾ que ce lieu est une spirale logarithmique dont j'ai déterminé les éléments. Je me bornerai ici à les transcrire pour le seul cas qui nous occupe, dans lequel l'exposant est égal à 2.

Si l'on emploie la notation auxiliaire

$$\cot \beta = 4 \cot \alpha,$$

(1) Sous certaines réserves relatives à l'exposant négatif, qu'il est inutile de rappeler, puisque ce cas ne se présente pas ici.

on a pour les coordonnées horizontales de G_0

$$x''' = 3r'' \sin \beta \cos (\theta'' - \beta),$$

$$y''' = 3r'' \sin \beta \sin (\theta'' - \beta),$$

et pour le lieu de ce point

$$r''' = e^{A(\theta'' - \beta)},$$

c'est-à-dire une spirale logarithmique égale au lieu géométrique de g_0 et déviée de

$$\Delta = \text{arc cot}(4 \cot a) + \text{tang } a \text{ Log} \left(\frac{3 \cos a}{\sqrt{\sin^2 a + 16 \cos^2 a}} \right),$$

ce qui revient finalement à faire tourner la directrice de l'angle $\delta + \Delta$.

Si l'on résolvait numériquement par rapport à l'angle a l'équation transcendante

$$\delta + \Delta = 2k\pi,$$

on déterminerait ainsi des surfaces nautiloïdes spéciales, dont la directrice (quelle que soit la génératrice) contient en elle-même tous les centres de gravité du volume croissant à partir du pôle.

§ XII

Moments d'inertie

80. La recherche des moments d'inertie se fera en supposant, dans les formules générales du § VIII: $k = 2$.

Si l'on demande le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque, la théorie générale permet de passer de cette droite à une autre menée parallèlement par le centre de gravité (lequel nous est connu, § X), puis, au moyen d'une opération inverse, de celle-ci à une troisième tirée parallèlement par l'origine des coordonnées. Nous pouvons donc nous borner à envisager les axes issus de ce point.

En second lieu, la théorie générale rattache le moment d'inertie relatif à une semblable droite, au moyen de l'ellipsoïde de POINSON, à l'évaluation des six intégrales

$$(50) \quad \begin{aligned} &\Sigma v(y^2 + z^2), \quad \Sigma v(x^2 + z^2), \quad \Sigma v(x^2 + y^2); \\ &\Sigma vyz, \quad \Sigma vxz, \quad \Sigma vxy. \end{aligned}$$

La recherche des deux premières peut être remplacée par celle de leur somme et de leur différence

$$2\Sigma vx^2 + \Sigma v(x^2 + y^2), \quad \Sigma v(x^2 - y^2).$$

Nous substituerons donc aux trois premières évaluations les trois suivantes, qui seront plus avantageuses

$$\Sigma vx^2, \quad \Sigma v(x^2 + y^2), \quad \Sigma v(x^2 - y^2).$$

De là six questions à résoudre successivement.

La première est des plus simples. Il vient immédiatement

$$d\Sigma vx^2 = \Sigma u \left(1 + \frac{z}{\rho}\right) ds \cdot z^2 = ds \Sigma uz^2 + \frac{ds}{\rho} \Sigma uz^2 z^2.$$

Si donc nous employons ces notations analogues aux précédentes (N° 71)

$$l_2 = \Sigma uz^2, \quad l'_3 = \Sigma uz^2 z^2,$$

nous obtiendrons la valeur

$$(51) \quad \frac{d}{d\theta} \Sigma vx^2 = l_2 + \frac{l'_3}{\rho} = \left(l_2 + \frac{z}{\rho} l'_3\right) \frac{z}{\rho} \frac{ds}{d\theta},$$

dans laquelle il suffira de substituer les expressions différentielles de ρ et $\frac{ds}{d\theta}$ en fonction de F, F', F'' pour que le problème se trouve ramené aux quadratures.

81. Nous avons en second lieu (52), (53)

$$\begin{aligned} d\Sigma v(x^2 + y^2) \\ = \Sigma \{ [r \cos \theta + \xi \sin(\theta + a)]^2 + [r \sin \theta - \xi \cos(\theta + a)]^2 \}, \\ = r^2 \Sigma v + 2r \sin a \Sigma v \xi + \Sigma v \xi^2 = n_0 r^2 + 2n_1 r \sin a + n_2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{ds} \Sigma v(x^2 + y^2) = \left(m_0 + \frac{m_1}{\rho}\right) r^2 + 2 \left(m_1 + \frac{m_2}{\rho}\right) r \sin a + \left(m_2 + \frac{m_3}{\rho}\right).$$

Nous pouvons d'ailleurs (aussi bien dans cette circonstance que pour les évaluations qui suivront) invoquer les formules

$$\begin{aligned} (52) \quad \sin a &= r \frac{d\theta}{ds}, \quad \cos a = \frac{dr}{ds}, \\ \sin 2a &= 2r \frac{dr}{d\theta} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2, \quad \cos 2a = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Il vient donc, en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$

$$\frac{d}{d\theta} \Sigma v(x^2 + y^2) = \left(m_0 + \frac{m_1}{\rho}\right) r^2 \frac{ds}{d\theta} + 2 \left(m_1 + \frac{m_2}{\rho}\right) r^2 + \left(m_2 + \frac{m_3}{\rho}\right) \frac{ds}{d\theta},$$

ou en fonction de φ

$$\begin{aligned} (53) \quad \frac{d}{d\theta} \Sigma v(x^2 + y^2) &= \left(\mu_0 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_1\right) \varphi^2 r^2 \frac{ds}{d\theta} \\ &+ 2 \left(\mu_1 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_2\right) \varphi^3 r^2 + \left(\mu_2 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_3\right) \varphi^4 \frac{ds}{d\theta}, \end{aligned}$$

formule dans laquelle il suffit encore (aussi bien que pour les suivantes) de rendre à ρ et $\frac{ds}{d\theta}$ leurs valeurs différentielles en F, F', F'' .

82. Il vient en troisième lieu

$$d\Sigma v(x^2 - y^2) = n_0 r^2 \cos 2\theta + 2n_1 r \sin(2\theta + a) - n_2 \cos(2\theta + 2a),$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Sigma v(x^2 - y^2) &= \left(m_0 + \frac{m_1}{\rho}\right) r^2 \cos 2\theta \\ &+ 2 \left(m_1 + \frac{m_2}{\rho}\right) (r \sin a \cos 2\theta + \cos a \sin 2\theta) \\ &+ \left(m_2 + \frac{m_3}{\rho}\right) (\sin 2a \sin 2\theta - \cos 2a \cos 2\theta), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$, substituant les valeurs (52), et ramenant les intégrales m aux constantes μ

$$\begin{aligned} (54) \quad \frac{d}{d\theta} \Sigma v(x^2 - y^2) &= \left(\mu_0 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_1\right) \varphi^2 r^2 \frac{ds}{d\theta} \cos 2\theta \\ &+ 2 \left(\mu_1 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_2\right) \varphi^3 r \left(\frac{dr}{d\theta} \sin 2\theta + r \cos 2\theta\right) \\ &+ \left(\mu_2 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_3\right) \varphi^4 \left[2r \frac{dr}{ds} \sin 2\theta + \frac{r^2 - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \frac{ds}{d\theta} \cos 2\theta \right]. \end{aligned}$$

83. Nous obtiendrons en quatrième lieu par une analyse absolument semblable

$$2d\Sigma xy = n_0 r^2 \sin 2\theta + 2n_1 r \cos(2\theta + a) + n_2 \sin(2\theta + 2a),$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{ds} \Sigma rxy &= \left(m_0 + \frac{m_1}{\rho}\right) r^2 \sin 2\theta \\ &- 2 \left(m_1 + \frac{m_2}{\rho}\right) r (\sin a \sin 2\theta - \cos a \cos 2\theta) \\ &+ \left(m_2 + \frac{m_3}{\rho}\right) (\sin 2a \cos 2\theta + \cos 2a \sin 2\theta), \end{aligned}$$

et enfin (4)

$$(55) \quad 2 \frac{d}{d\theta} \Sigma vxy - \left(\mu_0 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_1 \right) \varphi^2 r^2 \frac{ds}{d\theta} \sin 2\theta \\ - 2 \left(\mu_1 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_2 \right) \varphi^3 r \left(r \sin 2\theta - \frac{dr}{d\theta} \cos 2\theta \right) \\ - \left(\mu_2 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_3 \right) \varphi^4 \left[\frac{r^2 - \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} \frac{ds}{d\theta} \sin 2\theta - 2r \frac{\frac{dr}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} \cos 2\theta \right].$$

84. Il vient en cinquième lieu

$$d\Sigma vxz = r \cos \theta \Sigma vz + \sin (\theta + a) \Sigma v \tilde{\xi} z, \\ = r \cos \theta \Sigma u \left(1 + \frac{\tilde{\xi}}{\rho} \right) z + \sin (\theta + a) \Sigma u \left(1 + \frac{\tilde{\xi}}{\rho} \right) \tilde{\xi} z, \\ = r \cos \theta \Sigma uz + \left[\frac{r}{\rho} \cos \theta + \sin (\theta + a) \right] \Sigma u \tilde{\xi} z + \frac{\sin (\theta + a)}{\rho} \Sigma u \tilde{\xi}^2 z, \\ = \left(l_1 + \frac{l_2}{\rho} \right) r \cos \theta + \left(l_2 + \frac{l_3}{\rho} \right) (\sin a \cos \theta + \cos a \sin \theta), \\ = \left(\lambda_1 + \frac{\varphi}{\rho} \lambda_2 \right) \varphi^3 r \cos \theta + \left(\lambda_2 + \frac{\varphi}{\rho} \lambda_3 \right) \varphi^4 \left(r \frac{d\theta}{ds} \cos \theta + \frac{dr}{ds} \sin \theta \right),$$

et enfin, en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$

$$(56) \quad \frac{d}{d\theta} \Sigma vxz = \left(\lambda_1 + \frac{\varphi}{\rho} \lambda_2 \right) \varphi^3 r \frac{ds}{d\theta} \cos \theta \\ + \left(\lambda_2 + \frac{\varphi}{\rho} \lambda_3 \right) \varphi^4 \left(r \cos \theta + \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \right).$$

(1) Il faut remarquer que la valeur (55) concerne $2\Sigma vxy$, tandis que le facteur 2 n'accompagnera pas celles de Σvxz , Σvyz (56), (57).

85. On trouvera en sixième lieu par une marche identique

$$d\Sigma vyz = r \sin \theta \Sigma vz + \cos(\theta + a) \Sigma v \xi z,$$

$$\frac{d}{ds} \Sigma vyz = \left(l_1 + \frac{l'_2}{\rho} \right) r \sin \theta + \left(l'_2 + \frac{l_3}{\rho} \right) (\cos a \cos \theta - \sin a \sin \theta),$$

et en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$

$$(57) \quad \frac{d}{d\theta} \Sigma vyz = \left(k_1 + \frac{\varphi}{\rho} k'_2 \right) \varphi^3 r \frac{ds}{d\theta} \sin \theta$$

$$- \left(k'_2 + \frac{\varphi}{\rho} k_3 \right) \varphi^4 \left(r \sin \theta - \frac{dr}{d\theta} \cos \theta \right).$$

86. Les six formules (51 à 57), après que l'on y a substitué ρ et $\frac{ds}{d\theta}$ en F, F', F'' , puis F et φ en θ , ramènent aux quadratures la détermination des six sommes auxquelles se réduit la recherche d'un moment d'inertie quelconque.

Elles renferment les intégrales définies

$$(58) \quad \mu_1, \quad \mu_3, \quad \lambda_1, \quad \lambda'_2, \quad \lambda'_3;$$

et

$$\mu_0, \quad \mu_2, \quad \lambda_2;$$

qui devront être déduites de l'équation de la génératrice, lorsque celle-ci sera spécifiée dans chaque cas. Mais ces huit intégrales forment deux groupes bien distincts. Les cinq premières renferment au premier degré l'une au moins des coordonnées z, ξ . Elles s'annulent donc identiquement en cas de symétrie du profil générateur par rapport à l'axe perpendiculaire à cette coordonnée. Toutes les cinq disparaissent à la fois d'après cela, en cas de symétrie dans les quatre angles droits ⁽¹⁾. Au con-

(1) Par exemple, pour le cercle, qui est symétrique dans les quatre angles, on a, en prenant son rayon comme unité

$$\mu_1 = \mu_3 = \lambda_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = 0, \quad \mu_0 = \pi, \quad \mu_2 = \lambda_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Ce cas prendra beaucoup d'importance (en dehors des §§ III et VII) dans les troisième et quatrième parties de ce mémoire, où il constituera le système *permanent* des valeurs des huit intégrales.

traire, les trois dernières intégrales ne sauraient jamais s'annuler, car elles expriment l'aire et deux moments d'inertie ⁽¹⁾.

(1) Pour présenter un exemple comportant les huit intégrales, supposons que la génératrice soit la parabole

$$z = \xi^2,$$

(d'ordre positif quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable) dont le sommet soit placé au point I, en appelant b la base, et h l'ordonnée extrême du segment considéré. L'élément superficiel prend alors la valeur $u = d\xi dz$, et l'intégrale l'expression

$$\begin{aligned} \Sigma u \xi^i \xi^j &= \int_0^b \xi^j d\xi \int_0^{\xi^2} z^i dz \\ &= \frac{b^{i+1} h^{j+1}}{(i+1) [(i+1)q + j + 1]} = \frac{h^{i+1} b^{j+1}}{(i+1) [(i+1)q + j + 1]}. \end{aligned}$$

Le tableau suivant résume les applications de cette formule à quatre exem-

| Intégrales | | Exposants | | Facteur d'homogénéité | Rectangle | Triangle | Parabole du 2 ^e degré | Seconde parabole cubique |
|--------------|--------------------|-----------|-----|-----------------------|---------------|----------------|----------------------------------|--------------------------|
| | | i | j | | $q = 0$ | $q = 1$ | $q = \frac{1}{2}$ | $q = \frac{3}{2}$ |
| μ_0 | Σu | 0 | 0 | bh | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{5}$ |
| μ_1 | $\Sigma u \xi$ | 0 | 1 | $b^2 h$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{7}$ |
| λ_1 | $\Sigma u z$ | 1 | 0 | $b h^2$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{5}$ |
| μ_2 | $\Sigma u \xi^2$ | 0 | 2 | $b^3 h$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{9}$ |
| λ'_2 | $\Sigma u \xi z$ | 1 | 1 | $b^2 h^2$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ |
| λ_2 | $\Sigma u z^2$ | 2 | 0 | $b h^3$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
| μ_3 | $\Sigma u \xi^3$ | 0 | 3 | $b h^4$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{11}$ |
| λ'_3 | $\Sigma u \xi^2 z$ | 1 | 2 | $b^3 h^2$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ |

Pour conduire jusqu'au bout la présente analyse sans nous assujettir à la complication de nos six formules générales, nous conviendrons de nous réduire au cas de la disparition des cinq intégrales impaires. Dans ces conditions, les deux dernières dérivées (56) (57) s'annulent d'elles mêmes

$$(59) \quad \frac{d}{d\theta} \Sigma vxz = 0, \quad \frac{d}{d\theta} \Sigma vyz = 0;$$

et les quatre autres se simplifient de la manière suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \Sigma vz^2 &= \mu_2 \varphi^4 \frac{ds}{d\theta}, \\ \frac{d}{d\theta} \Sigma v(x^2 + y^2) &= \mu_0 \varphi^2 r^2 \frac{ds}{d\theta} + \mu_2 \varphi^4 \left(2 \frac{r^2}{\rho} + \frac{ds}{d\theta} \right), \end{aligned}$$

plus simples, à savoir : une horizontale, une droite inclinée passant par le point I, la parabole du second degré, la parabole semi-cubique (fig. 11).

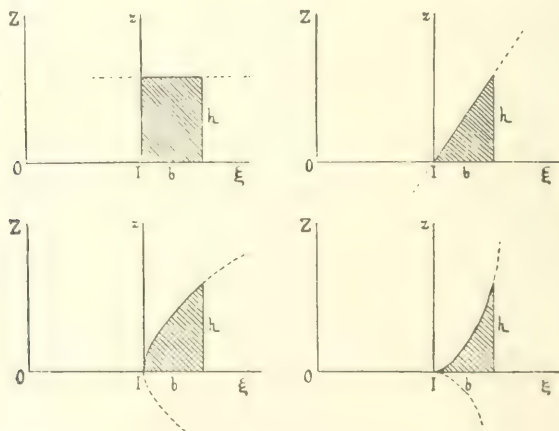


Fig. 11

Les deux premières colonnes présentent la désignation des huit intégrales qui figurent dans nos formules générales, et les deux suivantes les exposants correspondants. La cinquième renferme le facteur d'homogénéité, et les quatre dernières les valeurs numériques des coefficients pour les quatre exemples en question.

$$\frac{d}{d\theta} \Sigma v(x^2 - y^2) = \mu_0 \varphi^2 r^2 \frac{ds}{d\theta} \cos 2\theta$$

$$+ \mu_2 \varphi^4 \left\{ 2r \frac{dr}{d\theta} \left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}} \right) \sin 2\theta + \left[\frac{2r^2}{\varphi} + r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \frac{ds}{d\theta} \right] \cos 2\theta \right\},$$

$$2 \frac{d}{d\theta} \Sigma vxy = \mu_0 \varphi^2 r^2 \frac{ds}{d\theta} \sin 2\theta$$

$$- \mu_2 \varphi^4 \left\{ \left[\frac{2r^2}{\varphi} + r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right] \sin 2\theta - 2r \frac{dr}{d\theta} \left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}} \right) \cos 2\theta \right\}.$$

§ XIII

Application aux nautiloïdes

87. Appliquons ces formules aux nautiloïdes à front normal, et génératrice quelconque.

Il vient en remplaçant φ par r , ou $e^{\lambda\theta}$

$$\frac{d}{d\theta} \Sigma v z^2 = \frac{\lambda_2}{\sin a} e^{5\lambda\theta},$$

d'où, en intégrant entre le pôle et un point quelconque

$$\Sigma v z^2 = \frac{\lambda_2}{5 \cos a} e^{5\lambda\theta} = \frac{\lambda_2 r^5}{5 \cos a}.$$

Si nous considérons en particulier le tronçon qui s'étend du pôle au point I, nous aurons

$$(\Sigma v z^2)_I = \frac{\lambda_2}{5 \cos a}.$$

On trouve en second lieu

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \Sigma v(x^2 + y^2) &= [\mu_0 + \mu_2(1 + 2 \sin^2 a)] \frac{e^{5\Lambda\theta}}{\sin a}, \\ \Sigma v(x^2 + y^2) &= [\mu_0 + \mu_2(1 + 2 \sin^2 a)] \frac{e^{5\Lambda\theta}}{5 \cos a}, \\ (60) \quad [\Sigma v(x^2 + y^2)]_1 &= \frac{\mu_0 + \mu_2(1 + 2 \sin^2 a)}{5 \cos a}.\end{aligned}$$

En troisième lieu :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \Sigma v(x^2 - y^2) &= \{ 2\mu_2 \sin 2a \sin 2\theta \\ &+ [\mu_0 + (4 \sin^2 a - 1)\mu_2] \cos 2\theta \} \frac{e^{5\Lambda\theta}}{\sin a},\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\Sigma v(x^2 - y^2) &= 4\mu_2 \cos a \int_{-\infty}^{\theta} e^{5\Lambda\theta} \sin 2\theta d\theta \\ &+ \frac{\mu_0 + (4 \sin^2 a - 1)\mu_2}{\sin a} \int_{-\infty}^{\theta} e^{5\Lambda\theta} \cos 2\theta d\theta.\end{aligned}$$

Rien de plus facile, encore une fois, que d'effectuer ces intégrations (N° 72), mais je préfère remarquer qu'en raison de la similitude, l'ellipsoïde de Poisson relatif au pôle pour le tronçon variable, fait partie de l'édifice géométrique entraîné par le point directeur de son azimuth terminal. Il suffit donc d'en obtenir la détermination pour un seul tronçon, par exemple celui qui aboutit en I ($\theta = 0$). Une fois celui-ci connu, il suffirait, pour tout autre limite à un point quelconque M, d'y faire passer l'axe polaire, auquel on rapporterait cette nouvelle figure. Elle se retrouverait alors dans les conditions identiques aux précédentes, sauf les dimensions absolues; et le nouveau moment d'inertie serait à l'ancien dans le rapport des cinquièmes puissances des rayons-limites.

Nous n'avons donc qu'à effectuer les intégrations entre $-\infty$

et zéro. Or ces deux quadratures ont pour expressions

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i5\theta} \sin 2\theta d\theta = -\frac{2 \sin^2 a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i5\theta} \cos 2\theta d\theta = \frac{5 \sin a \cos a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a}.$$

Il vient d'après cela

$$(4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a) [\Sigma v (x^2 - y^2)]_1 =$$

$$-2 \sin^2 a \cdot 4 \mu_2 \cos a + 5 \sin a \cos a \frac{\mu_0 + (4 \sin^2 a - 1) \mu_2}{\sin a},$$

ou en réduisant

$$[\Sigma v (x^2 - y^2)]_1 = \frac{5 \mu_0 + (12 \sin^2 a - 5) \mu_2}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a} \cos a.$$

Une analyse toute semblable donnera d'autre part

$$(2 \Sigma v xy)_1 = \frac{-2 \mu_0 + 6 (3 \sin^2 a - 2) \mu_2 \sin a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a}.$$

88. Si nous voulons déterminer les axes principaux d'inertie du pôle pour un bloc nautiloïde, de génératrice quelconque, il suffira, d'après la remarque précédente, de le faire pour le tronçon Ol ; leur disposition angulaire par rapport au front normal du point terminus restant immuable et liée à l'édifice géométrique de ce point.

Remarquons tout d'abord que l'un d'eux est l'axe zénithal lui-même. Nous avons trouvé en effet (N° 86) pour les deux intégrales qui s'y rapportent des dérivées nulles (59), entraînant des intégrales générales constantes, et des intégrales définies nulles

$$\Sigma v xz = 0, \quad \Sigma v yz = 0,$$

ce qui est le caractère d'un axe principal OZ .

Les deux autres seront dès lors les axes de symétrie de l'ellipse suivant laquelle l'équateur coupe l'ellipsoïde de Poisson. Or le calcul classique de la réduction d'une ellipse à ses axes

donne pour l'angle α que fait l'un d'eux avec OI la valeur

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{(2\Sigma vxy)_1}{[\Sigma v(x^2 - y^2)]_1} = \operatorname{tang} \alpha \cdot \frac{-2\mu_0 + 6(3\sin^2 \alpha - 2)\mu_2}{5\mu_0 + (12\sin^2 \alpha - 5)\mu_2}.$$

Si par exemple on envisage en particulier la plus simple des spirales logarithmiques, celle de 45 degrés, il vient avec une génératrice quelconque

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{2\mu_0 + 3\mu_2}{5\mu_0 + \mu_2},$$

et si celle-ci est un cercle (N° 86, note 1) comme dans le nautilé

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{11}{21}, \quad \alpha = 13^\circ 49' 22'', 75.$$

§ XIV

Front oblique

89. Dans ces théories relatives au volume, au centre de gravité et au moment d'inertie, nous avons essentiellement supposé

le front normal, avec une entière généralité d'ailleurs en ce qui concerne la directrice, la génératrice, et la loi de similitude. Nous pouvons maintenant nous affranchir de cette restriction, et rendre à la loi d'inclinaison frontale toute son indépendance.

Considérons en effet (fig. 12) le front MF mené sous un angle

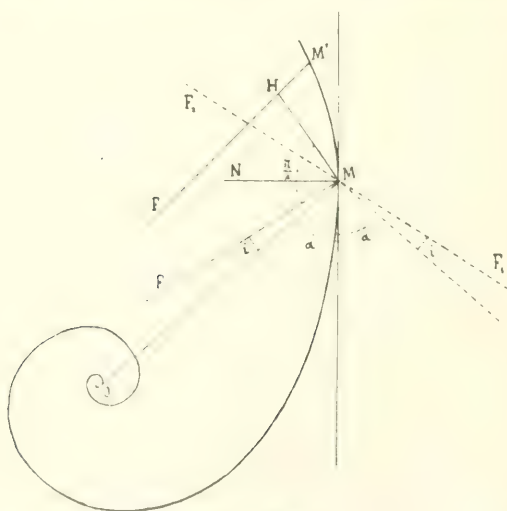


Fig. 12

quelconque

$$i = \psi(\theta),$$

par rapport au rayon vecteur OM; et soit M'F un front infiniment rapproché. L'épaisseur élémentaire de la tranche, mesurée en M, sera MH perpendiculaire à ces droites, et l'on aura dans le triangle rectangle HMM'

$$MH = MM' \cos HMM' = ds \cos \left(MM'F - \frac{\pi}{2} \right) = \sin(i - a),$$

ou d'après la valeur de a

$$MH = ds \sin \left[\psi(\theta) + \arctan \frac{F(\theta)}{F'(\theta)} \right].$$

Dans les théories précédentes, l'épaisseur de la tranche en O était exprimée par ds . Il nous suffit donc, pour passer d'un cas à l'autre, d'introduire dans toutes les expressions différentielles auxquelles nous nous sommes trouvés conduits, le *multiplicateur*

$$(61) \quad \sin \left(\psi + \arctan \frac{F}{F'} \right).$$

Je ne saurais, bien entendu, reprendre avec cette modification la série des calculs et des discussions qui précèdent. Je me bornerai à en montrer l'application sur les deux exemples suivants.

90. Adoptons comme directrice un cercle passant par l'origine

$$r = F(\theta) = C \cos \theta,$$

et supposons un front *valsant*, c'est-à-dire exécutant autour de la verticale du point décrivant M une gyration proportionnelle à la rotation du rayon vecteur

$$i = \psi(\theta) = m\theta.$$

Supposons enfin que la surface soit vectorielle du premier ordre. Tout se trouve ainsi déterminé, à l'exception de la génératrice qui reste quelconque. Nous la supposerons cependant centrée, pour obtenir plus de simplicité dans les résultats.

Il vient dans ces conditions

$$\frac{F}{F'} = -\cot \theta, \quad \text{arc tang } \frac{F}{F'} = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Le multiplicateur (61) devient donc

$$\sin \left[m\theta + \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] = \cos (m+1)\theta.$$

Je signalerai tout d'abord une dualité qui associe deux par deux des allures valsantes distinctes aboutissant aux mêmes résultats. Supposons une nouvelle vitesse angulaire m' qui satisfasse à la condition

$$m' + 1 = -(m + 1).$$

Le multiplicateur ne sera en rien modifié, non plus par conséquent que les conclusions de l'analyse. Or cette relation nous donne

$$m' = -(m + 2).$$

Le nouveau problème se rapporte donc à une rotation de sens contraire, dont la valeur absolue est modifiée dans le rapport de $m+2$ à m .

91. Effectuons l'intégration. La formule (38) qui exprime le volume devient, par l'adjonction du multiplicateur (61), et en tenant compte de ce que la section génératrice est centrée ($\xi'_4 = 0$)

$$dV = U_1 z^2 \cos (m+1)\theta, ds.$$

Or nous avons pris

$$r = C \cos \theta, \quad z = \frac{r}{C} \cos \theta, \quad ds = C d\theta;$$

$$\frac{dV}{d\theta} = U_1 C \cos^2 \theta \cos (m+1)\theta,$$

$$\frac{2}{U_1 C} \frac{dV}{d\theta} = (1 + \cos 2\theta) \cos (m+1)\theta,$$

$$\frac{1}{U_1 C} \frac{dV}{d\theta} = 2 \cos (m+1)\theta + \cos (m+3)\theta + \cos (m-1)\theta.$$

et en intégrant entre les points I et M, c'est-à-dire de 0 à θ

$$\begin{aligned} \frac{4}{U_1 C} V &= \frac{2}{m+1} \sin(m+1)\theta \\ &+ \frac{1}{m+3} \sin(m+3)\theta + \frac{1}{m-1} \sin(m-1)\theta. \end{aligned}$$

Il faut toutefois faire exception pour les trois hypothèses qui annulent quelqu'un des dénominateurs

$$m = 1, \quad m = -1, \quad m = -3.$$

La première $m = 1$ donne directement

$$\begin{aligned} \frac{4}{U_1 C} \frac{dV}{d\theta} &= 1 + 2 \cos 2\theta + \cos 4\theta, \\ \frac{4}{U_1 C} V &= \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta. \end{aligned}$$

La dernière $m = -3$ constitue précisément avec celle-ci le cas de dualité, et fournit le même résultat.

La seconde hypothèse $m = -1$ donne de son côté

$$\begin{aligned} \frac{4}{U_1 C} \frac{dV}{d\theta} &= 2 + 2 \cos 2\theta, \\ \frac{4}{U_1 C} V &= 2\theta + \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Elle se confond d'ailleurs avec son propre cas de dualité. On remarquera que le front fait alors, à l'extrémité M du rayon vecteur, un angle alterne-interne égal à celui que forme, en l'autre extrémité O, l'axe polaire. Il reste donc parallèle à lui-même, et l'on se trouve dans le cas déjà signalé (N° 5, note 1).

92. Généralisons l'analyse précédente en substituant à la directrice circulaire la spirale sinusoïde dont elle n'est qu'un cas particulier

$$r^n = C^n \cos n\theta.$$

Nous étendrons de même la loi de similitude en supposant une

surface vectorielle d'ordre quelconque p

$$z = \left(\frac{r}{C} \right)^p = \cos^{\frac{p}{n}} n\theta.$$

Il vient dans ces conditions

$$ds = C \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta d\theta, \quad a = \frac{\pi}{2} - n\theta,$$

$$\sin \left(\frac{\phi}{r} + \text{arc tang} \frac{F}{F'} \right) = \cos (n\theta - \phi).$$

L'expression (38) du volume (de section centrée) devient, en la complétant par ce multiplicateur

$$dV = U_1 z^2 ds \cos (n\theta - \phi),$$

$$\frac{1}{U_1 C} \frac{dV}{d\theta} = \cos^{\frac{2p-n-1}{n}} n\theta \cos (n\theta - \phi),$$

quelle que soit la loi ϕ de l'inclinaison frontale.

93. Signalons de nouveau une dualité analogue à celle que nous avons déjà rencontrée.

Relions à cet effet à la loi quelconque ϕ , une nouvelle allure valsante par la condition

$$(n\theta - \phi_1) = - (n\theta - \phi).$$

Le multiplicateur ne sera pas modifié, non plus que les résultats. Or on déduit de là

$$(62) \quad \phi_1 = 2n\theta - \phi = \pi - (\phi + 2a).$$

Traçons d'après cela en MF_1 le symétrique de MF par rapport à la tangente MA , et prolongeons-la en sens contraire suivant MF_2 . Nous obtiendrons en F_1MA l'angle $\phi + a$, et en F_1MO : $\phi + 2a$; par conséquent en OMF_2 : $\pi - (\phi + 2a)$. Le front conjugué est donc le symétrique du proposé par rapport à la tangente de la directrice.

94. Faisons maintenant certaines hypothèses sur la loi d'inclinaison frontale ϕ .

Je suppose en premier lieu que le plan de la génératrice soit assujéti à rester symétrique de la tangente à la directrice par rapport au rayon vecteur. Il vient alors

$$i = a, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - n\theta, \quad n\theta - \psi = 2n\theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(n\theta - \psi) = \sin 2n\theta = 2 \sin n\theta \cos n\theta,$$

$$\frac{1}{2U_1C} \frac{dV}{d\theta} = \cos^{\frac{2p+1}{n}} n\theta \sin n\theta,$$

d'où en intégrant de zéro à θ

$$\frac{2p+n+1}{2nU_1C} V = 1 - \cos^{\frac{2p+n+1}{n}} n\theta = 1 - \left(\frac{r}{C}\right)^{\frac{2p+n+1}{n}},$$

solution d'une complète généralité, quel que soit l'ordre de la spirale sinusoïde.

La combinaison conjuguée (62) sera

$$\psi_1 = 3n\theta - \frac{\pi}{2}, \quad \pi = -3a.$$

Ce nouveau front est symétrique du précédent par rapport à la tangente, et il possède une vitesse de rotation triple de celle du premier, mais en sens contraire.

95. Comme second exemple, envisageons le front méridien $\phi = 0$. Il vient alors

$$\frac{1}{2U_1C} \frac{dV}{d\theta} = \cos^{\frac{2p+1}{n}} n\theta.$$

La solution conjuguée est dans ce cas

$$\psi_1 = 2n\theta - \pi = -2a.$$

Le nouveau front reste donc symétrique du rayon vecteur par rapport à la tangente.

L'intégration ne peut plus, comme dans le cas précédent, s'effectuer d'une manière générale. On la réussira du moins lorsque l'exposant sera un nombre entier N, positif ou négatif.

Cette condition

$$\frac{2p+1}{n} = N, \quad p = \frac{Nn-1}{2}, \quad n = \frac{2p+1}{N},$$

peut toujours être remplie pour une spirale quelconque en lui adjoignant un ordre vectoriel convenable, ou réciproquement.

Contentons-nous à cet égard de l'unique hypothèse

$$N = 1, \quad p = \frac{n-1}{2}, \quad n = 2p+1.$$

Il vient alors, pour une spirale d'ordre quelconque n associée à une loi vectorielle d'exposant $\frac{n-1}{2}$

$$\frac{1}{2U_1C} \frac{dV}{d\theta} = \cos n\theta, \quad \frac{n}{2U_1C} V = \sin n\theta;$$

ou inversement, pour une loi vectorielle p , appliquée à la spirale sinusoïde d'ordre $2p+1$

$$\frac{1}{2U_1C} \frac{dV}{d\theta} = \cos (2p+1)\theta, \quad \frac{2p+1}{2U_1C} V = \sin (2p+1)\theta.$$

Cette hypothèse donne par exemple pour le cercle ($n=1$), la loi de similitude $p=0$, c'est-à-dire un anneau-tube; et de même, pour la ligne droite ($n=-1$) la similitude $p=-1$, s'exerçant en raison inverse du rayon vecteur.

§ XV

Coordonnées intrinsèques

96. On connaît l'élégance et l'utilité de l'équation naturelle des lignes planes

$$\rho = F(\varepsilon),$$

qui les représente à l'aide d'une relation entre leurs *coordonnées intrinsèques*, à savoir le rayon de courbure ρ et l'angle de contingence ε évalué à partir d'une tangente fixe. Leur emploi permet de traiter avec facilité des courbes qui seraient souvent inabordables par d'autres voies.

Il semble en particulier que l'on doive en attendre ici un utile secours, puisque nos formules générales renferment en évidence le rayon de courbure φ et l'arc ds de la directrice, relié à z par les formules

$$(63) \quad ds = \varphi d\varepsilon, \quad s = \int_0^z F(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Il conviendra naturellement de se donner alors en fonction de la même variable z la loi de similitude $\varphi(z)$, et celle $\psi(z)$ de l'inclinaison frontale. La génératrice seule restera comme ci-dessus représentée dans le plan de front par son équation ordinaire entre z et ξ ; mais nous savons que celle-ci n'intervient que pour l'évaluation des diverses intégrales définies λ , μ .

La formule générale du volume (38) devient dès lors

$$(64) \quad \frac{dV}{dz} = U_1 \cdot F \left(1 + \xi' \varphi \right) \varphi^3.$$

Le genre de similitude le plus naturel, dans ces nouvelles conditions, consiste à supposer que les dimensions de la génératrice varient comme une puissance arbitraire p du rayon de courbure de la directrice

$$\varphi = F^p.$$

Il vient alors

$$\frac{dV}{dz} = U_1 (F^{2p+1} + \xi' F^{3p}).$$

On aura en particulier pour le premier ordre du genre de similitude

$$\frac{dV}{dz} = U_1 (1 + \xi') F^3,$$

ou, en représentant en abrégé par C la constante

$$\frac{dV}{dz} = CF^3, \quad V = C \int_0^z F^3(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Je me bornerai, pour les applications qui suivent, à cette formule simple; mais toutes les intégrations réussiraient encore, bien qu'avec plus de complication, pour une puissance quelconque p du rayon de courbure.

97. Considérons la développante de cercle d'ordre quelconque q , rapportée, ainsi que toutes celles des ordres qui précèdent, à un même point de la circonférence, qui constitue leur point de rebroussement commun

$$\rho = z^q, \quad s = \frac{z^{q+1}}{q+1},$$

$$V = C \int_0^z z^{3q} dz = \frac{C}{3q+1} z^{3q+1} = \frac{q+1}{3q+1} C \rho^2 s.$$

Il vient pour l'épicycloïde ou l'hypocycloïde d'ordre quelconque q entier, fractionnaire, ou incommensurable ⁽¹⁾, rapportée à son sommet

$$\rho = \cos qz, \quad s = \frac{1}{q} \sin qz,$$

$$\begin{aligned} (65) \quad V &= C \int_0^z \cos^3 qz dz = \frac{C}{4} \int_0^z (\cos 3qz + 3 \cos qz) dz \\ &= \frac{C}{3q} \sin qz (3 - \sin^2 qz) = \frac{C}{3} (\rho^2 + 2) s. \end{aligned}$$

Considérons encore la chaînette rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad s = \tanh z,$$

$$\begin{aligned} V &= C \int_0^z \frac{dz}{\cos^6 z} = \frac{C}{15} (15 \tanh z + 10 \tanh^3 z + 3 \tanh^5 z) \\ &= \frac{Cs}{15} (15 + 10 s^2 + 3 s^4). \end{aligned}$$

La tractrice, qui en est la développante, a pour équation rapportée à son point de rebroussement

$$\rho = \tanh z, \quad s = -\text{Log} \cos z,$$

$$V = C \int_0^z \tanh^3 z dz = \frac{C}{2} (\tanh^2 z + 2 \text{Log} \cos z) = \frac{C}{2} (\rho^2 - s).$$

(1) La valeur $q = 1$ correspond à la cycloïde.

Soit enfin la chaînette d'égale résistance rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos \varepsilon}, \quad s = \text{Log tang} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$V = C \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\cos^3 \varepsilon} = \frac{C}{2} \left[\frac{\sin \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} + \text{Log tang} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{C}{2} (\rho \sqrt{\rho^2 - 1} + s).$$

98. Si, au lieu d'un front normal, nous supposons une inclinaison quelconque $\psi(\varepsilon)$ sur la normale ⁽¹⁾, le multiplicateur à introduire (N° 89) sera simplement $\cos \psi$, et l'expression générale du volume deviendra

$$V = C \int_0^\varepsilon F^3(\varepsilon) \cos [\psi(\varepsilon)] d\varepsilon.$$

Bornons nous à l'exemple de l'épicycloïde, avec mouvement valant de même module qu'elle

$$\psi(\varepsilon) = \cos q\varepsilon,$$

il viendra (65)

$$V = C \int_0^\varepsilon \cos^4 q\varepsilon d\varepsilon = \frac{C}{32q} (\sin 4q\varepsilon + 8 \sin 2q\varepsilon + 3q\varepsilon)$$

$$= \frac{C}{32q} (8 \sin q\varepsilon \cos^3 q\varepsilon + 12 \sin q\varepsilon \cos q\varepsilon + 3q\varepsilon)$$

$$= \frac{C}{32} (8s\rho^3 + 12s\rho + 3\varepsilon).$$

99. Passons maintenant à la recherche du centre de gravité.

La question se complique alors, car l'emploi des coordonnées intrinsèques exclut (et c'est ordinairement son avantage spécial) le recours à des repères extérieurs pris dans le plan de la courbe. Or ils nous sont indispensables pour y rapporter le centre de gravité du volume engendré. Nous tournerons la dif-

(1) Et non plus sur le rayon vecteur des coordonnées polaires, qui ont disparu de la question.

tielle dont nous avons formé ci-dessus l'expression

$$My = \left(x + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} F \sin \varepsilon \right) V \\ - \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \int_0^\varepsilon V [(\mu_1 + \mu_2) F' \sin \varepsilon + (\mu_0 + 2\mu_1 + \mu_2) F \cos \varepsilon] d\varepsilon,$$

attendu que le terme explicite s'annule avec V pour la limite inférieure de l'intégration. Comme d'ailleurs

$$x = \int_0^\varepsilon F \cos \varepsilon d\varepsilon,$$

la recherche de My (c'est-à-dire du produit par V de l'abscisse du centre de gravité G de ce volume) revient finalement à la détermination des deux quadratures

$$\int_0^\varepsilon VF' \sin \varepsilon d\varepsilon, \quad \int_0^\varepsilon VF \cos \varepsilon d\varepsilon,$$

dans lesquelles on aura préalablement substitué pour V sa valeur déduite de l'équation (64).

La recherche de l'ordonnée de G par rapport à la tangente initiale dépendra elle-même de ces deux autres intégrales définies

$$\int_0^\varepsilon VF' \cos \varepsilon d\varepsilon, \quad \int_0^\varepsilon VF \sin \varepsilon d\varepsilon.$$

100. Considérons comme application l'épicycloïde.

Nous avons trouvé (65), pour le volume correspondant, la somme de deux termes en $\sin q\varepsilon$ et $\sin^3 q\varepsilon$. Les quatre quadratures précédentes nous présenteront donc, diversement associés, les facteurs $\sin \varepsilon$, $\cos \varepsilon$, $\sin q\varepsilon$, $\cos q\varepsilon$, $\sin^3 q\varepsilon$. Or pourrait même leur adjoindre un multiplicateur de la forme $\cos m\varepsilon$, si l'on voulait attribuer au front un mouvement valsant d'une allure quelconque. Or de tels produits peuvent toujours, par les moyens élémentaires, être décomposés en simples sinus ou cosinus de multiples de ε , dont l'intégration sera immédiate.

On en pourrait dire autant pour la développante de cercle d'ordre quelconque, à l'aide de formules connues d'intégration.

TROISIEME PARTIE

Surfaces sphérales

§ XVI

Surfaces enveloppes

101. Nous avons déjà rencontré deux types de surfaces se rapprochant, bien qu'à des degrés différents, de l'aspect extérieur du genre *Nautilus* que nous présente la nature vivante (§ III, § VII). Nous pouvons faire un pas de plus vers cette assimilation.

Il ne saurait suffire, pour que des surfaces méritent le nom de *corps ronds*, qu'elles présentent (comme les quadriques par exemple) des systèmes de stries circulaires. Cette dénomination doit être réservée en propre aux surfaces de révolution, qui peuvent être travaillées sur le tour. Mais on pourrait appeler *corps arrondis* ceux qui, le long de chacune de telles sections circulaires, admettent une sphère de raccordement. Ils se présentent d'après cela comme des *enveloppes de sphères*. Nous nous proposerons d'en constituer une pour le but qui nous occupe, sous le nom de *sphéro-nautili*. Mais il convient auparavant d'élargir cette question des enveloppes.

102. Supposons qu'une surface quelconque

$$(66) \quad f(x, y, z) = 0,$$

se meuve dans l'espace sous la double condition de varier homothétiquement par rapport au point qui sert actuellement d'origine pour l'équation (66), en même temps que ce centre de similitude décrira, pour son propre compte, une directrice quelconque représentée, par rapport aux axes fixes, par les deux relations

$$(67) \quad F_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad F_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

La loi de similitude reste elle-même arbitraire, définie à chaque instant par la fonction

$$(68) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Cherchons l'enveloppe ainsi engendrée.

Je commence par construire une surface homothétique à la proposée, par rapport à l'origine et dans le rapport voulu

$$f\left(\frac{x}{\varphi}, \frac{y}{\varphi}, \frac{z}{\varphi}\right) = 0.$$

Puis je la transporte parallèlement à elle-même jusqu'à la position correspondante du point directeur (α, β, γ)

$$(69) \quad f\left(\frac{x-\alpha}{\varphi}, \frac{y-\beta}{\varphi}, \frac{z-\gamma}{\varphi}\right) = 0.$$

Nous obtenons ainsi l'une des *enveloppées*.

Nous en aurions une autre en écrivant la même formule après avoir attribué aux paramètres des valeurs $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$. L'intersection de ces deux enveloppées fournirait alors une courbe, que nous appellerons *caractéristique*, et dont la surface cherchée sera le lieu géométrique.

Or dans les calculs à effectuer sur ces deux relations, nous pouvons substituer à la seconde la différentielle de la première prise par rapport à α, β, γ , en traitant x, y, z comme des constantes. Appelons (70) l'égalité ainsi obtenue. D'ailleurs les différentielles $d\alpha, d\beta, d\gamma$, n'y sont pas indépendantes, mais liées par l'obligation, pour le centre de similitude, de suivre la directrice. Nous devons donc également différentier les deux conditions (67), en vue d'éliminer entre ces trois formules différentielles les deux rapports de $d\alpha, d\beta, d\gamma$, qui figurent au premier degré. Désignons de même par (71) l'égalité obtenue en annulant le déterminant de ce système. La caractéristique sera dès lors représentée par les formules (69) et (71).

Pour en obtenir le lieu géométrique, il suffira d'éliminer α, β, γ entre cette relation et les deux conditions (67). L'équation résultante en x, y, z , représentera l'enveloppe cherchée.

103. Supposons spécialement que la surface génératrice (66) soit une quadrique. L'équation (69) étant du second degré par rapport aux binômes $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$, si on la multiplie par φ^2 , la partie de degré supérieur ne renfermera plus ce rapport de similitude; celle du premier degré se trouvera multipliée par φ , et le terme indépendant par φ^2 . La différentielle (70) relative à α, β, γ sera par conséquent une relation du premier degré en $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$. Il en sera de même de celle (71) que l'on en déduit en chassant les rapports différentiels. Je la représen-

terai en abrégé par

$$(72) \quad P = 0.$$

La caractéristique est donc alors une courbe plane, c'est-à-dire une conique; et par conséquent l'enveloppe admet un système de sections planes du second degré.

104. Formons actuellement, avec un paramètre arbitraire λ , l'équation générale

$$(73) \quad f + \lambda P^2 = 0,$$

en représentant en abrégé par f l'expression (69). Nous constituons de cette manière une surface très générale du second degré, dont la rencontre avec l'enveloppée (69) se fait précisément suivant la caractéristique, attendu que la combinaison des deux équations (73) et (69) donne $P^2 = 0$. On reconnaît en outre qu'il y a raccordement des deux surfaces suivant cette courbe, puisque leur intersection se fait dans un plan double.

Nous voyons ainsi que l'enveloppe cherchée des surfaces (69) est en même temps l'enveloppe de chacune des familles en nombre infini (73), qui sont définies individuellement par la série des valeurs numériques attribuées arbitrairement à λ .

105. Mais parmi cette infinité de familles, une seule nous intéressera ici. C'est celle des cônes circonscrits suivant la caractéristique à la quadrique mobile, pour chacun des instants de sa déformation. Cherchons donc la valeur bien déterminée de λ qui fournit cette famille spéciale.

Nous devons pour cela exprimer que la quadrique (73) passe par son propre centre. Ce point s'obtient en égalant à zéro les trois dérivées partielles de la fonction (73) relatives à x , y , z . Appelons (74) ce système d'équations du premier degré.

Si nous reportons dans la relation (73) les valeurs qu'il nous fournit pour les coordonnées du centre, nous déduirons de l'égalité ainsi formée la valeur spéciale λ_0 qui fournit des cônes. En attribuant alors cette valeur au paramètre de la relation générale (73), nous obtiendrons finalement l'équation

$$(75) \quad f + \lambda_0 P^2 = 0,$$

qui représente la famille des cônes circonscrits.

106. Il nous est facile de trouver le lieu géométrique de leurs sommets.

Les coordonnées x, y, z de chacun d'eux sont en effet reliées par les trois équations (74) réunies aux deux conditions (67) régissant les paramètres α, β, γ . Si, entre ces cinq relations, on élimine ces trois derniers, il restera entre x, y, z les deux équations du lieu cherché.

On sait d'ailleurs qu'il n'est pas autre que celui des pôles du plan de la caractéristique par rapport à l'enveloppée qui le contient.

107. Supposons actuellement que la quadrique (66) soit à centre; et adoptons ce point C comme centre d'homothétie.

Je considère la surface variable dans deux positions quelconques, de centres C, C'; et je trace la droite CC'. Elle aura pour projections sur les trois axes $\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma$. L'équation (66) ne possédant pas de termes du premier degré en x, y, z , si l'on multiplie la formule (69) par φ^2 , cette fonction φ n'affectera que le terme indépendant. La partie du second degré sera dès lors la même pour cette égalité et celle dans laquelle α, β, γ auront été remplacés par α', β', γ' . Elle disparaîtra donc si nous retranchons ces deux formules l'une de l'autre. Il ne restera, en ce qui concerne x, y, z , que les termes du premier degré de (69), dans les coefficients desquels α, β, γ seraient remplacés par $\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma$. L'intersection des deux quadriques est donc plane.

Si l'on effectue à l'aide de la formule de TAYLOR le passage de (66) à (69), les coefficients de x, y, z au premier degré seront respectivement

$$f'_x(\alpha, \beta, \gamma), \quad f'_y, \quad f'_z.$$

Ceux de l'équation de l'intersection deviendront donc

$$f'_x(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma), \quad f'_y, \quad f'_z.$$

Or on sait que ces quantités sont proportionnelles aux cosinus directeurs du plan diamétral conjugué de la direction qui a pour composantes $\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma$, c'est-à-dire de la ligne CC', ou de la droite des centres. Telle est donc la direction du plan de l'intersection des deux quadriques.

108. Plaçons maintenant C et C' en deux points infiniment voisins sur la directrice (67). La droite CC' en deviendra la

tangente. Par conséquent, durant le mouvement qui engendre l'enveloppe, le plan de la caractéristique reste à chaque instant conjugué, dans la quadrique enveloppée, de celui de ses diamètres qui est tangent à la directrice.

Nous savons d'ailleurs que ce diamètre contient le sommet du cône circonscrit suivant cette caractéristique. Le lieu du sommet de ce cône, que nous avons appris à déterminer (n.º 106) est donc une ligne tracée sur la surface développable qui a la directrice pour arête de rebroussement, et se trouve formée par l'ensemble des tangentes de cette courbe.

§ XVII

Surfaces sphérales

109. Supposons enfin que la quadrique mobile devienne une sphère, dont le centre parcourt la directrice proposée.

Les surfaces enveloppes de sphères, que nous appellerons plus brièvement *sphérales*, ont fait l'objet de beaux travaux. Nous nous restreindrons ici au point de vue spécial de nos recherches, et notamment nous n'envisagerons, de ces surfaces, que la nappe réelle.

Remarquons avant tout que les caractéristiques étant planes, seront toujours des cercles.

Si nous prenons l'équation originelle (66) de la surface sous la forme

$$(76) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

l'enveloppée (69) deviendra

$$(77) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \varphi^2(\alpha, \beta, \gamma),$$

et sa différentielle relative aux trois paramètres

$$(78) \quad (x - \alpha) d\alpha + (y - \beta) d\beta + (z - \gamma) d\gamma \\ + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} d\gamma \right) \varphi = 0.$$

Elle représente la caractéristique, une fois que l'on en a chassé les rapports différentiels de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, déduits de la différentiation des relations (67). Or les coefficients des coordonnées

courantes x, y, z sont précisément ces trois éléments. On voit donc que le plan de la caractéristique est perpendiculaire à la tangente à la directrice au point occupé sur cette courbe par le centre de la sphère variable. C'était d'ailleurs facile à prévoir, puisqu'il est (n.^o 108) parallèle au plan diamétral conjugué de cette tangente.

110. Toutefois ce plan ne passe pas par le point directeur. Il s'en trouve à une distance h mesurée suivant la tangente; qui a pour valeur

$$h = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dv^2}}.$$

Cette expression représente dès lors la hauteur du cône qui a pour sommet le centre de la sphère, et pour génératrices les normales de cette dernière le long de la caractéristique.

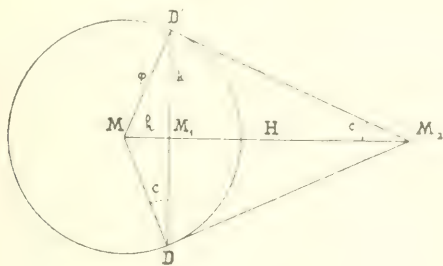


Fig. 14

L'angle c qu'elles font avec son plan (fig. 14) a pour valeur

$$\sin c = \frac{h}{z} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial v} dv}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dv^2}},$$

ou encore

$$(79) \quad \tan c = \frac{h}{k},$$

en désignant par k le rayon de la caractéristique.

Ce dernier forme avec h un triangle rectangle dont l'hypo-

ténuse est le rayon sphérique φ , ce qui donne

$$(80) \quad k = \sqrt{\varphi^2 - h^2}.$$

On peut enfin exprimer la hauteur H du cône de révolution circonscrit à la sphère (et par suite à la sphérale) le long de cette caractéristique. Elle constitue une troisième proportionnelle à k et h ,

$$(81) \quad H = \frac{k^2}{h}.$$

L'angle générateur de ce cône n'est autre que c .

111. Attachons-nous spécialement, comme dans les deux parties précédentes de ce mémoire, au cas d'une directrice plane comprise dans l'équateur

$$(82) \quad y = F(x).$$

Le rapport de similitude ne dépendra plus que d'une seule variable, sous la forme $\varphi(\alpha)$; puisque $\gamma = 0$, et que β peut être remplacé par $F(\alpha)$.

L'équation de la sphère mobile devient dans ces conditions

$$(83) \quad (x - \alpha)^2 + [y - F(\alpha)]^2 + z^2 - \varphi^2(\alpha) = 0,$$

et sa dérivée relative à α

$$(84) \quad (x - \alpha) + [y - F(\alpha)] F'(\alpha) - \varphi(\alpha) \varphi'(\alpha) = 0.$$

La recherche de l'équation de la sphérale se réduit à l'élimination du paramètre α entre ces deux relations.

La distance du centre de la sphère au plan de la caractéristique devient alors

$$(85) \quad h = \frac{\varphi \varphi'}{\sqrt{1 + F'^2}},$$

et les quantités c , k , H s'en déduisent par les formules (79), (80), (81).

112. Les sphérales de cette catégorie présentant une série de sections circulaires perpendiculaires au plan de l'équateur,

Il vient donc

$$(86) \quad r_1^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \frac{F'_1}{\sqrt{F_1^2 + F'_1{}^2}}.$$

Nous aurons d'autre part

$$\frac{\sin(\theta - \theta_1)}{h} = \frac{\sin \alpha}{r_1},$$

c'est-à-dire

$$(87) \quad \sin(\theta - \theta_1) = \frac{F_2}{r_1} \cdot \frac{F_1}{\sqrt{F_1^2 + F'_1{}^2}}.$$

En éliminant θ entre ces deux relations, on obtiendra en r_1 , θ_1 l'équation de la nouvelle directrice.

Quant à l'inclinaison frontale, elle a pour valeur

$$(88) \quad i = OM_1F = \frac{\pi}{2} - OM_1A = \frac{\pi}{2} - (OMA + MOM_1) \\ = \frac{\pi}{2} - \alpha - (\theta - \theta_1).$$

En y remettant la valeur de θ en fonction de θ_1 , procurée par l'élimination précédente, on obtiendra sous la forme

$$i = \varphi(\theta_1),$$

la loi de cette inclinaison.

Enfin celle de la similitude deviendra

$$\varphi(\alpha) = \varphi[F_1(\theta) \cos \theta],$$

dans laquelle on aura substitué cette même valeur de θ .

113. Toutes les sphérales jouissent de cette importante propriété que leur directrice (plane ou gauche) est rencontrée par chacune de leurs normales. En effet celles-ci sont également des normales pour chacune des sphères enveloppées, qui ont leurs centres alignés sur la directrice. Cette dernière se trouve en quelque sorte *hérissée* de l'ensemble de ces normales, qui rayonnent de chacun de ses points en forme de cône de révolution, d'angle générateur variable $\frac{\pi}{2} - c$.

114. Nous pouvons tirer parti de cette propriété pour résoudre la question suivante.

Etant donnée une directrice F (82) dans le plan de l'équateur, déterminer pour chacun de ses points une loi φ du rayon sphérique telle que la sphère qui en résultera soit circonscrite à une surface

$$(89) \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

assignée à priori.

La normale à cette dernière en un de ses points (x, y, z) , que nous prenons par la pensée sur la ligne de contact inconnue, a pour équations

$$\frac{X-x}{\psi'_x} = \frac{Y-y}{\psi'_y} = \frac{Z-z}{\psi'_z}.$$

D'après la remarque précédente (N° 113), elle rencontrera la directrice, puisqu'elle est également une normale de la sphère; et ce ne pourra être que par sa trace sur le plan de l'équateur ($Z=0$), dans lequel est située cette courbe. On aura donc, entre les coordonnées de cette trace

$$(90) \quad \alpha = x - \frac{\psi'_y}{\psi'_z}, \quad \beta = y - z \frac{\psi'_y}{\psi'_z},$$

la relation

$$(91) \quad \beta = F(\alpha),$$

c'est-à-dire

$$(92) \quad y - z \frac{\psi'_y}{\psi'_z} = F\left(x - z \frac{\psi'_y}{\psi'_z}\right).$$

La ligne de contact sera dès lors représentée par les deux équations (89), (92).

Quant à la sphère qui admet pour son propre compte cette normale au point (x, y, z) , elle doit avoir son centre en (α, β) , et un rayon φ encore inconnu. Son équation est donc

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = \varphi^2.$$

Mais puisque le point (x, y, z) se trouve sur la ligne de contact, les trois relations (89), (90) permettent de déterminer ses coor-

données en fonction de α . Si donc on reporte ces trois valeurs dans cette expression de φ^2 , on possèdera ainsi la loi cherchée $\varphi(\alpha)$. A partir de ce moment, on rentrera dans les conditions ordinaires pour la recherche de l'équation de la sphérale.

§ XVIII

Sphérales réciproques

115. Appelons sphérales *vectorielles* celles pour lesquelles le rayon φ de la sphère variable reste en chaque point de la directrice D (plane ou gauche) proportionnel au rayon vecteur OM de cette courbe, que nous continuerons à représenter par r , mais en lui attribuant la valeur la plus générale, celle de l'espace

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Le rayon sphérique sera donc Br , ou $r \sin b$, si nous conservons nos anciennes notations. La lettre ρ restera affectée à représenter les rayons vecteurs ON des divers points de la sphérale elle-même.

Transformons tout l'ensemble de la figure par rayons vecteurs réciproques

$$\rho \rho' = k^2.$$

La directrice D se change en une courbe D' située sur le même cône de sommet O, et rencontrant la précédente en un ou plusieurs points K, de rayon vecteur $OK = k$.

Chacune des sphères se transforme en une autre sphère. À l'intersection de deux d'entre elles infiniment voisines correspondra celle des deux nouvelles. En un mot chaque caractéristique se change en une nouvelle caractéristique circulaire, et l'ancienne enveloppe devient une autre sphérale. Déterminons en la directrice et la loi de similitude.

Les points le plus rapproché et le plus éloigné du pôle sur chaque sphère (fig. 16) ont pour rayons vecteurs

$$OP = r - Br = (1 - B)r,$$

$$OQ = r + Br = (1 + B)r.$$

Quant au nouveau rayon sphérique, il a pour valeur

$$C_1Q' = OC_1 - CQ' = \frac{k^2}{(1+B^2)r} - \frac{k^2}{(1+B)r} \\ = \frac{k^2}{(1+B)r} \left(\frac{1}{1+B} - 1 \right) = \frac{Bk^2}{(1+B^2)r} = Br_1.$$

La nouvelle sphérale est donc elle-même vectorielle, et du même indice B que la proposée. Nous pouvons dès lors énoncer ce théorème fondamental.

La transformée par rayons vecteurs réciproques d'une sphérale vectorielle quelconque d'indice $\sin b$ est une autre sphérale vectorielle de même indice, ayant pour directrice une courbe homothétique, dans le rapport $\sec^2 b$, de la transformée de la directrice proposée.

116. Considérons comme exemple la surface qui concentrera plus loin notre attention (§ XXIII) sous le nom de *sphéro-nautil*, et qui a pour directrice D la spirale logarithmique

$$r = e^{\Lambda \theta}.$$

La transformée D' de cette courbe sera

$$r' = \frac{k^2}{r} = k^2 e^{-\Lambda \theta},$$

et la nouvelle directrice D₁

$$r_1 = \frac{r'}{\cos^2 b} = \left(\frac{k}{\cos b} \right)^2 e^{-\Lambda \theta},$$

ce qui peut s'écrire

$$r_1 = e^{\Lambda \left[\theta - 2 \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \left(\frac{k}{\cos b} \right) \right]}.$$

La surface réciproque du sphéro-nautil est donc un sphéro-nautil.

actuelle les sphérales spéciales que nous appellerons *équiradiales*, pour lesquelles le rayon sphérique reste constamment égal au rayon vecteur

$$B = 1.$$

tile identique, mais renversé autour du rayon vecteur de valeur $\frac{k}{\cos b}$, de manière à tourner dans le sens dextrorsum si le proposé était sinistrorsum, ou réciproquement.

Sur les divers cônes de latitude, chaque conhélice a pour transformée une conhélice du nouveau sphéro-nautil.

117. Considérons de même la sphérale vectorielle qui a pour directrice la spirale sinusoïde d'ordre quelconque n (N° 137)

$$r = \cos^{\frac{1}{n}} n\theta.$$

La nouvelle directrice sera

$$r' = \frac{k^2}{r \cos^2 b} = \left(\frac{k}{\cos b} \right)^2 \cos^{-\frac{1}{n}} (-n\theta),$$

c'est-à-dire une spirale sinusoïde d'ordre égal et de signe contraire.

La transformée par rayons vecteurs réciproques de la proposée sera donc une sphérale appartenant à la même catégorie et de même indice vectoriel, mais d'ordre égal et de signe contraire, et amplifiée homothétiquement dans le rapport $\sec^2 b$.

118. On obtient un énoncé identique avec les spirales algébriques (N° 138), qui ont pour équation

$$r = \theta^n.$$

§ XIX

Directrice en coordonnées sphériques

119. Le théorème fondamental qui précède (N° 115) permet d'associer deux par deux les sphérales vectorielles pour la recherche des leurs équations, en choisissant à cet effet la plus simple. Cette remarque devient particulièrement utile en ce qui concerne les directrices planes pour lesquelles on adopterait un pôle vectoriel *situé en dehors de leur plan*, à une distance h .

Le plan aura en effet pour transformée par rayons vecteurs réciproques de module k une sphère passant par le pôle, sur laquelle les rayons vecteurs de la directrice plane D dessinent

c'est-à-dire en coordonnées mixtes R, ω, λ

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{\cos^2 \lambda} - 2R [\sin \mu \cos (\theta - \omega) + \cos \mu \tan \lambda] \\ - 2B^2 \cos \mu + (1 - 2B^2) = 0, \end{aligned}$$

et enfin, d'après l'équation de la directrice

$$\begin{aligned} (93) \quad \left(\frac{R}{\cos \lambda} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{\cos \lambda} \right) [\sin \lambda \cos \mu + \cos \lambda \sin \mu \cos (F - \omega)] \\ - 2B^2 \cos \mu + (1 - 2B^2) = 0. \end{aligned}$$

Telle est l'équation de la sphère variable en fonction du paramètre μ .

Prenons en la dérivée par rapport à ce dernier

$$\begin{aligned} \frac{B^2 \sin \mu \cos \lambda}{R} + \sin \lambda \sin \mu - \cos \lambda \cos \mu \cos (F - \omega) \\ + \cos \lambda \sin \mu \sin (F - \omega) F' = 0, \end{aligned}$$

on en divisant par $\sin \mu \cos \lambda$

$$\frac{B^2}{R} + \tan \lambda - \cot \mu \cos (F - \omega) + F' \sin (F - \omega) = 0,$$

et enfin

$$(94) \quad F' \sin (F - \omega) = \cot \mu \cos (F - \omega) - M,$$

si l'on pose pour abréger

$$M = \tan \lambda + \frac{B^2}{R}.$$

Or la relation (93) donne, en la divisant par $\frac{2R}{\cos \lambda}$

$$\begin{aligned} \cos \lambda \sin \mu \cos (F - \omega) + \sin \lambda \cos \mu \\ = \frac{R}{2 \cos \lambda} - \frac{\cos \lambda}{2R} (2B^2 \cos \mu + 2B^2 - 1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\sin \mu \cos (F - \omega) &= \tan \lambda \cos \mu + \frac{R^2}{2 \cos^2 \lambda} - \frac{B^2}{R} \cos \mu + \frac{1 - 2B^2}{2R} \\ &= - \left(\tan \lambda + \frac{B^2}{R} \right) \cos \mu + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\cos^2 \lambda} + \frac{1 - 2B^2}{R} \right).\end{aligned}$$

Si enfin nous introduisons la nouvelle abréviation

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\cos^2 \lambda} + \frac{1 - 2B^2}{R} \right),$$

on pourra écrire

$$(95) \quad \sin \mu \cos (F - \omega) = N - M \cos \mu.$$

Substituons cette valeur de $\cos (F - \omega)$ dans l'égalité (94), il viendra

$$(96) \quad F' \sin^2 \mu \sin (F - \omega) = N \cos \mu - M.$$

Actuellement multiplions les deux membres de la relation (95) par $F' \sin \mu$, élevons les au carré, ainsi que ceux de (96), et ajoutons. Nous faisons ainsi disparaître ω , et il reste

$$(97) \quad F'^2 \sin^4 \mu = F'^2 \sin^2 \mu (N - M \cos \mu)^2 + (N \cos \mu - M)^2.$$

Cette résolvante renferme μ sous les signes trigonométriques et dans la fonction F' , sans que F y paraisse par lui-même. Quant aux symboles M , N , ils sont uniquement fonctions de R et λ . Il ne restera plus qu'à tirer dans chaque cas de cette égalité l'expression de μ , pour la substituer dans la précédente (96), ce qui fournira en R , ω , λ l'équation de la sphérale.

120. Appliquons cette méthode à la recherche de la sphérale vectorielle qui a pour directrice une *loxodromie*.

Le triangle infinitésimal formé par les trois arcs élémentaires de cette ligne, du méridien et du parallèle donne pour l'angle constant α que fait la courbe avec le méridien

$$\cot \alpha = \frac{d\mu}{\sin \mu d\theta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\theta}{d\mu} = F'(\mu) = \frac{\tan a}{\sin \mu}.$$

La relation (97) devient dès lors

$$\tan^2 a [\sin^2 \mu - (N - M \cos \mu)^2] = (N \cos \mu - M)^2,$$

ou en développant

$$[(M^2 + 1) \sin^2 a + N^2 \cos^2 a] \cos^2 \mu + 2MN \cos \mu - [(N^2 - 1) \sin^2 a + M^2 \cos^2 a] = 0,$$

équation du second degré en $\cos \mu$, qui permettra d'achever la solution.

121. La transformée D' de la loxodromie D est une spirale logarithmique du même angle a , et la courbe D_1 semblable à celle-ci une spirale identique, mais déviée. Toutefois il ne s'ensuit pas pour cela que la sphérale correspondante soit un sphéro-nautil. En effet le rayon des sphères variables devrait pour cela prendre comme valeur $Be^{A\theta}$, tandis qu'elle est $B\sqrt{h^2 + e^{2A\theta}}$. Il s'agit donc ici d'une surface plus générale, d'après l'arbitraire h , admettant comme limite le sphéro-nautil, lorsque ce paramètre tend vers zéro.

§ XX

Directrice en coordonnées rectangulaires

122. Revenons maintenant à la directrice (82), rapportée, dans son propre plan, à des coordonnées rectangulaires. Nous avons vu qu'il suffit, pour obtenir l'équation de sa sphérale dans les conditions les plus générales, d'éliminer α entre les deux relations (83), (84).

Pour en montrer un exemple, prenons comme directrice un cercle de rayon égal à l'unité, avec un rayon sphérique By proportionnel à l'ordonnée de cette conférence. Si θ désigne l'azimut du centre de la sphère variable, elle aura pour équation

$$(x - \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 + z^2 = B^2 \sin^2 \theta,$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x \cos \theta + y \sin \theta) + \cos^2 \theta + (1 - B^2) \sin^2 \theta = 0,$$

ou, en coordonnées mixtes,

$$\frac{R^2}{\cos^2 \lambda} - 2R \cos(\theta - \omega) + 1 - B^2 \sin^2 \theta = 0.$$

Cette relation donne comme dérivée relative à θ

$$R \sin(\theta - \omega) = B^2 \sin \theta \cos \theta.$$

On tire de là

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \omega) &= \frac{B^2}{R} \sin \theta \cos \theta, \\ \cos(\theta - \omega) &= \frac{R}{2 \cos^2 \lambda} + \frac{1 - B^2 \sin^2 \theta}{2R}, \end{aligned}$$

et en ajoutant les carrés

$$1 = \frac{B^4 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}{R^2} + \left(\frac{R}{2 \cos^2 \lambda} + \frac{1 - B^2 \sin^2 \theta}{2R} \right)^2,$$

équation bicarrée en $\sin \theta$. Il n'y aura plus qu'à substituer la valeur qu'elle fournit dans l'équation dérivée, pour obtenir celle de la sphérale.

123. La méthode générale se simplifie pour les sphérales *équilatères*, dans lesquelles le rayon de la sphère mobile reste constamment égal à l'ordonnée de la directrice.

Si en effet on remplace z par F dans l'équation (83), elle se réduit à

$$(98) \quad F(x) = \frac{(x - x')^2 + y^2 + z^2}{2y},$$

d'où la dérivée

$$(99) \quad F'(x) = \frac{x - x'}{y},$$

avec élimination de x entre ces deux formules.

124. Si nous y faisons à la fois $y = 0$, $z = 0$, l'une quelconque des deux donne $x = x'$, et l'autre se trouve identiquement satisfaite par cette substitution. Il en faut conclure que

la droite représentée par ces deux équations, c'est-à-dire l'axe des abscisses, fait toujours partie de la surface. Ce résultat, d'ailleurs évident à l'avance, nous permet de signaler une conséquence utile.

Le pied P de toute ordonnée (fig. 18) fait d'après cela partie de la caractéristique. Or nous savons d'une manière générale (N^o 109) que la trace du plan de cette courbe est une perpendiculaire sur la tangente en M à la directrice. Abaissons donc cette perpendiculaire PP'. Mais cette tangente contient aussi le sommet M₂ du cône de révolution circonscrit suivant la caractéristique. Or PO tangente au grand cercle de la sphère mobile est une des génératrices de ce cône. Le sommet M₂ se trouve ainsi déterminé par l'intersection de ces deux droites. Dès lors la sphérale se présente sous un nouvel aspect distinct du précédent, comme l'enveloppe des cônes de révolution engendrés par la rotation de l'axe des abscisses autour de toutes les tangentes de la directrice successivement.

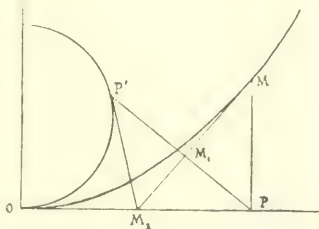


Fig. 18

125. Prenons comme exemple la *logarithmique*

$$y = e^{mx}.$$

Les formules (98), (99) deviennent

$$e^{mx} = \frac{(\alpha - x)^2 + y^2 + z^2}{2y},$$

$$e^{mx} = \frac{\alpha - x}{my},$$

d'où il suit :

$$(\alpha - x)^2 - \frac{2}{m} (\alpha - x) + y^2 + z^2 = 0,$$

$$\alpha - x = \frac{1}{m} \pm \sqrt{\frac{1}{m^2} - y^2 - z^2},$$

..

et pour l'équation de la sphérale

$$y^2 + z^2 + \left(\frac{1}{m} \pm \sqrt{\frac{1}{m^2} - y^2 - z^2} \right)^2 = 2ye^{mx} \pm \sqrt{1 - m^2(y^2 + z^2)}.$$

L'équation

$$y = n \operatorname{Log} x,$$

représente au fond la même courbe; mais, résolue sous cette forme, elle donne naissance à une sphérale toute différente. Les rayons sphériques, égaux aux nouvelles ordonnées, le sont dès lors aux anciennes abscisses et non plus, comme tout à l'heure, aux anciennes ordonnées.

Les formules générales (98), (99) donnent alors

$$n \operatorname{Log} a = \frac{(a-x)^2 + y^2 + z^2}{2y},$$

$$\frac{n}{a} = \frac{a-x}{y}.$$

cette dernière peut s'écrire :

$$(a-x)^2 + x(a-x) - ny = 0.$$

Elle nous fournit $a-x$ qu'il suffit de reporter dans la précédente; d'où l'équation de la nouvelle sphérale

$$z^2 = 2ny \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{x^2 + ny} + x}{2} \right) - y^2 - \left(\frac{\sqrt{x^2 + ny} - x}{2} \right)^2.$$

126. Considérons encore comme directrice la chaînette

$$y = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}.$$

Nous aurons (98, 99)

$$(100) \quad e^{mx} + e^{-mx} = \frac{(a-x)^2 + y^2 + z^2}{y},$$

$$e^{mx} - e^{-mx} = \frac{2}{my} (a-x),$$

d'où, en ajoutant et retranchant alternativement

$$2ye^{mx} = y^2 + z^2 + (a-x)^2 + \frac{2}{m}(a-x),$$

$$2ye^{-mx} = y^2 + z^2 + (a-x)^2 - \frac{2}{m}(a-x),$$

et en multipliant membre à membre

$$4y^2 = [y^2 + z^2 + (a-x)^2] - \frac{4}{m^2}(a-x)^2.$$

De là une équation bicarrée en $x-x$, dont on substituera les racines dans la formule (100).

La sinusoïde

$$y = \cos nx,$$

conduit également à une équation bicarrée: et cela devait être en effet, puisque les deux équations rentrent l'une dans l'autre si l'on prend

$$m = n\sqrt{-1}.$$

127. Envisageons enfin comme directrice la parabole d'ordre positif quelconque n , entier, fractionnaire ou incommensurable

$$y = x^n, \quad F = \alpha^n, \quad F' = nx^{n-1},$$

ce qui donne pour les équations générales (98), (99)

$$(101) \quad 2yx^n = (a-x)^2 + y^2 + z^2,$$

$$(102) \quad nyz^{n-1} = a-x.$$

Multiplions la première par n , la seconde par $2x$, et retranchons. Le terme α^n disparaît, et il reste

$$n(a-x)^2 - 2(a-x) + n(y^2 + z^2) = 0,$$

ou, sous une autre forme

$$(103) \quad (n-2)(a-x)^2 - 2x(a-x) + n(y^2 + z^2) = 0,$$

équation du second degré en $z - x$ qui donne

$$(104) \quad (n-2)(z-x) = x \pm \sqrt{x^2 - n(n-2)(y^2 + z^2)},$$

En substituant dans l'égalité (102), on obtient l'équation de la sphérale.

128. Il se présente cependant une exception pour le cas, précisément le plus simple de tous, celui de la parabole du second degré ($n=2$). La formule (104) ne peut plus alors fournir z ; mais si l'on se reporte à (103), il vient directement

$$\frac{y^2 + z^2}{x} = z - x = 2yx.$$

Tirant de là z et $z - x$ pour les substituer dans (101), on obtient

$$2y \left(\frac{y^2 + z^2}{2xy} \right)^2 = \left(\frac{y^2 + z^2}{x} \right)^2 + (y^2 + z^2),$$

d'où, en multipliant par $\frac{2x^2y}{y^2 + z^2}$

$$(105) \quad (y^2 + z^2)(1 - 2y) = 2x^2y,$$

sphérale du troisième degré.

Sa trace sur le plan $z=0$ de la directrice a pour équation

$$y(1 - 2y - 2x^2) = 0,$$

qui représente d'une part l'axe des abscisses $y=0$, comme nous le savons d'une manière générale (N° 128), et en second lieu le cercle

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{2} = 0,$$

qui passe au sommet de la parabole, et a pour centre son foyer (1).

(1) C'est précisément pour cette surface qu'a été tracée la figure 18.

§ XXI

Directrice en coordonnées polaires

129. Supposons maintenant que la directrice soit représentée par l'équation

$$r = F(\theta).$$

La sphère qui a pour rayon $z(\theta)$ et son centre au point (r, θ) admet comme équation

$$(106) \quad (x - r \cos \theta)^2 + (y - r \sin \theta)^2 + z^2 = z^2,$$

$$(107) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2F(x \cos \theta + y \sin \theta) + F^2 - z^2 = 0,$$

$$(108) \quad \frac{R^2}{\cos^2 \lambda} - 2FR \cos(\theta - \omega) + F^2 - z^2 = 0.$$

La dérivée relative à θ devient

$$(109) \quad FR \sin(\theta - \omega) - F'R \cos(\theta - \omega) + FF' - z z' = 0,$$

et l'équation de la sphère s'obtient par l'élimination de θ entre (108) et (109).

130. Si l'on envisage en particulier une sphérale vectorielle

$$z = Br = r \sin b,$$

ces équations fondamentales deviennent

$$(110) \quad F^2 \cos^2 b + 2FR \cos(\theta - \omega) + \frac{R^2}{\cos^2 \lambda} = 0,$$

$$(111) \quad FF' \cos^2 b + R[F' \cos(\theta - \omega) - F \sin(\theta - \omega)] = 0.$$

131. Mais revenons aux formules entièrement générales (108, 109), pour calculer les différents éléments de la caractéristique.

Nous savons que l'équation dérivée (109) représente la trace

du plan vertical de cette courbe. Rendons lui, en coordonnées rectangulaires, la forme

$$(F \sin \theta - F' \cos \theta) x - (F \cos \theta + F' \sin \theta) y + FF' - \varphi \varphi' = 0,$$

La distance h de ce plan au point décrivant $M(r \cos \theta, r \sin \theta)$ a pour valeur

$$h = \frac{(F \sin \theta - F' \cos \theta) F \cos \theta - (F \cos \theta + F' \sin \theta) F \sin \theta + FF' - \varphi \varphi'}{\sqrt{(F \sin \theta - F' \cos \theta)^2 + (F \cos \theta + F' \sin \theta)^2}},$$

ou en réduisant

$$(112) \quad h = -\frac{\varphi \varphi'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

Nous en déduisons (80) le rayon de la caractéristique

$$(113) \quad k^2 = \varphi^2 - h^2 = \varphi^2 \left(1 - \frac{\varphi'^2}{F^2 + F'^2} \right),$$

l'angle générateur (79) du cône circonscrit

$$(114) \quad \sin c = \frac{h}{\varphi} = -\frac{\varphi'}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

la hauteur (81) de ce cône

$$(115) \quad H = \frac{k^2}{h} = \frac{\varphi}{\varphi'} \left(\frac{F^2 + F'^2 - \varphi'^2}{\sqrt{F^2 + F'^2}} \right),$$

enfin la distance $MM_2 = H + h$ du point décrivant M au sommet du cône circonscrit:

$$(116) \quad H + h = \frac{k^2}{h} + h = \frac{\varphi^2}{h} = \frac{\varphi}{\varphi'} \sqrt{F^2 + F'^2} = \frac{\varphi}{\varphi'} \frac{r}{\sin a}.$$

132. Appliquons spécialement ces formules au cas des sphé-

rales vectorielles

$$(117) \quad \begin{aligned} \varphi &= F \sin b, \\ h &= \frac{FF' \sin^2 b}{\sqrt{F^2 + F'^2}}, \end{aligned}$$

$$(118) \quad k = F \sin b \sqrt{\frac{F^2 + F'^2 \cos^2 b}{F^2 + F'^2}},$$

$$(119) \quad \sin c = \frac{F' \sin b}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

$$(120) \quad H = \frac{F}{F'} \left(\frac{F^2 + F'^2 \cos^2 b}{\sqrt{F^2 + F'^2}} \right),$$

$$(121) \quad H + h = \frac{F}{F'} \sqrt{F^2 + F'^2} = \frac{r}{\cos a}.$$

Cette dernière valeur est indépendante du coefficient vectoriel b . Elle montre que le sommet M_2 du cône circonscrit se trouve à l'intersection de la tangente MM_2 de la directrice avec la perpendiculaire OM_2 élevée au pôle sur le rayon vecteur OM .

Lorsqu'il s'agit spécialement du sphéro-nautilé, dont la directrice est une spirale logarithmique, on sait que telle est la construction qui fait connaître, en MM_2 , la longueur de l'arc de cette courbe à partir de son pôle asymptotique.

133. Supposons comme exemple une directrice rectiligne perpendiculaire à l'axe polaire

$$r \cos \theta = 1, \quad F = \frac{1}{\cos \theta}.$$

La relation (107) devient

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y \tan \theta + \cos^2 b (1 + \tan^2 \theta) = 0.$$

On y peut considérer $\tan \theta$ comme le paramètre par rapport auquel doit être prise la dérivée, ce qui donne

$$\tan \theta = \frac{y}{\cos^2 b},$$

d'où, en substituant

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = \frac{y^2}{\cos^2 b} + \cos^2 b = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{(x-1)^2 + z^2}{\sin^2 b} - \frac{y^2}{\cos^2 b} = 1.$$

On y reconnaît l'équation de la surface gauche de révolution autour de la directrice. Son hyperbole méridienne

$$\frac{(x-1)^2}{\sin^2 b} - \frac{y^2}{\cos^2 b} = 1,$$

a pour demi-axes $\sin b$, $\cos b$, et pour foyer l'origine.

Si l'on veut envisager comme second exemple un cercle rapporté à l'un de ses points, il ne sera plus nécessaire de reprendre à cet effet aucun calcul. Cette courbe est en effet la transformée par rayons vecteurs réciproques de sa tangente au point diamétralement opposé au pôle. Dès lors la nouvelle sphérale sera, d'après le théorème fondamental du N° 116, la transformée par rayons vecteurs réciproques du précédent hyperboloïde de révolution à une nappe relativement à un des points de son cercle focal, à savoir

$$R = \cos k (\cos l \cos \omega \pm \sqrt{\cos^2 k - \cos^2 l}).$$

134. La méthode générale se simplifie lorsqu'il s'agit des sphères *équiradiales*, pour lesquelles le rayon sphérique reste constamment égal au rayon vecteur: $\varphi = r$. Il vient alors, en supposant $\cos b = 0$ dans les relations (110), (111)

$$(122) \quad F = \frac{R}{2 \cos(\theta - \omega) \cos^2 k}, \quad F = \frac{R \sin(\theta - \omega)}{2 \cos^2(\theta - \omega) \cos^2 k},$$

ce que l'on peut mettre sous la forme

$$(123) \quad \cos(\theta - \omega) = \frac{R}{2F \cos^2 k}, \quad \sin(\theta - \omega) = \frac{FR}{2F^2 \cos^2 k},$$

Nous aurons également en divisant membre à membre, et en

formant la somme des carrés

$$(124) \quad \frac{2 \cos^2 \lambda}{R} = \sqrt{\frac{F^2 + F'^2}{F^2}},$$

$$(125) \quad \tan(\theta - \omega) = \frac{F'}{F} = \cot \alpha,$$

d'où l'on déduit encore ces formules qui nous seront utiles plus loin

$$(126) \quad \omega = \theta + \arctan \frac{F}{F'} - \frac{\pi}{2} = \theta - \arctan \frac{F'}{F},$$

$$d\omega = \left(1 + \frac{F'^2 - FF''}{F^2 + F'^2}\right) d\theta - \frac{F'^2 + 2F'^2 - FF''}{F^2 + F'^2} d\theta.$$

135. Les équations (122) peuvent s'écrire :

$$\frac{R}{\cos^2 \lambda} = \frac{2F(\theta) \cos(\theta - \omega)}{\sin(\theta - \omega)} = \frac{2F'(\theta) \cos^2(\theta - \omega)}{\sin(\theta - \omega)}.$$

Si l'on imagine que l'on ait substitué dans l'une ou l'autre la valeur de θ déduite de (125), on obtiendra $\frac{R}{\cos^2 \lambda}$ en fonction de ω . La section opérée par un plan méridien quelconque $\omega = \text{const.}$ sera donc toujours une courbe représentée par l'équation

$$\frac{R}{\cos^2 \lambda} = \text{const.},$$

ou, entre les coordonnées polaires (ρ, λ)

$$\frac{\rho}{\cos \lambda} = \text{const.},$$

c'est-à-dire un cercle passant par le pôle.

Et en effet ce point appartenant à toutes les sphères, fait nécessairement partie de la sphère et de toutes les caractéristiques. On obtient donc leurs divers plans en menant par le pôle des plans normaux aux tangentes de la directrice (plane ou gauche). Lorsque celle-ci se trouve comprise dans un plan, ce sont précisément les sections circulaires méridiennes que le calcul vient de mettre en évidence.

On reconnaît dès lors qu'une sphérale équiradiale est engendrée par un cercle variable qui passe incessamment par le pôle, tandis que son centre parcourt la podaire de la directrice (plane ou gauche) relative à ce point.

Revenant au cas où celle-ci est comprise dans le plan de l'équateur, nous voyons que la trace équatoriale de la sphérale équiradiale est une courbe homothétique de cette podaire, obtenue en doublant tous ses rayons vecteurs. En effet OM_1 (fig. 19) étant la trace du plan de la caractéristique, le point M'_1 situé sur le grand cercle de la sphère variable, appartient à la sphérale, ainsi qu'à sa trace équatoriale.

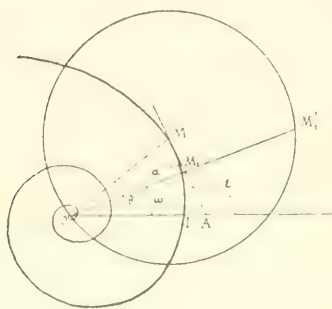


Fig. 19

C'est d'ailleurs ce qu'exprime, dans le cas actuel, la formule (125), d'après le triangle OMM_1 .

Constatons donc que les sphérales équiradiales pour une directrice (M) sont l'équivalent de nos anciennes équiradiales à front méridien générateur (N^o 10), mais pour une directrice (M_1) toute différente, qui est la podaire de la première.

136. Prenons comme exemple de directrice la spirale sinusoïde d'ordre tout à fait quelconque n

$$r^n = \cos n\theta,$$

$$F = \cos^{\frac{1}{n}} n\theta, \quad F' = -\cos^{\frac{1-n}{n}} n\theta \sin n\theta.$$

La relation (125) donne alors

$$\omega = \theta - \arccot \left(-\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \right) = (n+1)\theta,$$

$$\theta = \frac{\omega}{n+1}, \quad \theta - \omega = \frac{n}{n+1} \omega,$$

et en reportant cette valeur dans (124)

$$(127) \quad \frac{R}{2 \cos^2 k} = \cos^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \omega \right).$$

équation de la sphérale équiradiale.

Elle a pour trace équatoriale

$$(128) \quad \left(\frac{R}{2}\right)^{n+1} = \cos\left(\frac{n}{n+1}\omega\right),$$

c'est-à-dire une autre spirale sinusoïde d'ordre $\frac{n}{n+1}$; résultat conforme au théorème précédent (N° 136), d'après ce que l'on sait de la podaire de ces courbes (1).

137. Nous pouvons également effectuer cette recherche pour les coniques rapportées à leur foyer

$$r = \frac{b^2}{a(1 - e \cos \theta)}.$$

On obtient alors comme équation de la sphérale entre R , ω , λ

$$\omega = \arccos m - \arctan\left(\frac{e\sqrt{1-m^2}}{1-em}\right),$$

en employant l'abréviation suivante

$$m = \frac{2b^4 \cos^4 \lambda}{(a^2 R^2 - b^2)^2}.$$

138. Envisageons encore comme exemple la spirale algébrique d'ordre quelconque n positif ou négatif, entier, fractionnaire ou incommensurable

$$r = \theta^n.$$

(1) On peut signaler les directrices suivantes, qui fournissent, comme traces équatoriales, d'autres spirales sinusoïdes également simples :

$$\text{Cercle} \quad n = 1, \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \quad \text{cardiïde,}$$

$$\text{Parabole} \quad -\frac{1}{2}, \quad -1 \quad \text{droite,}$$

$$\text{Hyperbole} \quad -2, \quad +2 \quad \text{lemniscate}$$

La formule (124) devient

$$\frac{2 \cos^2 \lambda}{R} = \frac{\sqrt{\theta^{2n} - n^2 \theta^{2n-2}}}{\theta^{2n}} = \frac{\sqrt{\theta^2 - n^2}}{\theta^{n-1}},$$

c'est-à-dire

$$(129) \quad \frac{4 \cos^4 \lambda}{R^2} \theta^{2n-2} - \theta^2 - n^2 = 0.$$

La relation (125) donne de son côté

$$\omega = \theta + \arctang \frac{\theta}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

Elle est nettement insoluble par rapport à θ . Mais la précédente, qui est algébrique, pourra dans certains cas fournir, pour ce paramètre, une valeur qu'il suffira de substituer ici, de manière à obtenir définitivement l'équation de la sphérale.

Cette circonstance, si l'on se borne aux fonctions élémentaires⁽¹⁾, se présentera pour dix-sept directrices diverses, qui ramènent aux quatre premiers degrés la résolvante (129), envisagée par rapport à l'inconnue θ elle-même ou à certaines puissances auxiliaires de θ . On se trouve conduit au quatrième degré par les valeurs suivantes de l'exposant n

$$3, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{3}{4}, \quad -\frac{4}{3}, \quad -4;$$

(1) Si l'on fait $n=4$, la résolvante (129) prend d'elle-même par rapport à l'inconnue auxiliaire

$$\theta^2 \cos \lambda \sqrt{\frac{2}{R} - 1}.$$

la forme réduite de BRING et de JERRARD, qui a été employée par HERMITE pour ramener aux fonctions elliptiques la résolution de l'équation du cinquième degré. On obtient de telles équations pour les douze valeurs suivantes de n

$$4, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{5}{2}, \quad -5.$$

au troisième avec

$$2 \binom{4}{1}, \quad -\frac{1}{2} \binom{2}{1}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{2}, \quad -3;$$

au second pour

$$1 \binom{3}{1}, \quad -\frac{1}{2} \binom{4}{2}, \quad -2;$$

enfin au premier degré avec

$$0 \binom{5}{1}, \quad -1.$$

Je me contenterai, parmi ces vingt-neuf problèmes, d'envisager le plus simple, qui est celui de la spirale hyperbolique

$$n = -1, \quad F = \frac{1}{\theta}, \quad F' = -\frac{1}{\theta^2}, \quad \frac{F'}{F} = -\theta.$$

La relation (125) devient alors

$$(130) \quad \omega = \theta + \arccot \theta$$

Quant à la résolvante (124) elle donne

$$(131) \quad \begin{aligned} & \frac{4 \cos^4 k}{R^2} - \theta^2 - 1 = 0, \\ & \theta = \sqrt{\frac{4 \cos^4 k}{R^2} - 1}, \end{aligned}$$

ce qui fournit pour l'équation de la sphérale

$$(132) \quad \omega = \sqrt{\frac{4 \cos^4 k}{R^2} - 1} + \arccot \sqrt{\frac{4 \cos^4 k}{R^2} - 1}.$$

(1) Conchoïde de la spirale de GALILÉE (GOMES TEIXEIRA, *Tratado de las curvas especiales notables*, p. 367).

(2) Spirale de FERMAT (*ibidem*, p. 371).

(3) Spirale d'ARCHIMÈDE.

(4) Latus de CÔTES (*ibidem*, p. 380).

(5) Cercle.

§ XXII

Sphéro-nautille

139. Arrivons enfin à l'application principale que nous avons en vue dans ce travail, c'est-à-dire à l'équation du *sphéro-nautille*, pour lequel la directrice est la spirale logarithmique; le module vectoriel b redevenant quelconque.

La formule (121) donne alors

$$\begin{aligned} & Ae^{2\Lambda\theta} \cos^2 b + R [e^{\Lambda\theta} \sin(\theta - \omega) - Ae^{\Lambda\theta} \cos(\theta - \omega)] = 0, \\ (133) \quad & e^{\Lambda\theta} \cos a \cos^2 b = R [\cos(\theta - a) \cos a - \sin(\theta - a) \sin a]. \end{aligned}$$

$$(134) \quad e^{\Lambda\theta} = R \frac{\cos(\theta - \omega + a)}{\cos a \cos^2 b}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans la relation (110), R disparaît, et il reste

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2(\theta - \omega + a)}{\cos^2 a \cos^2 b} - 2 \frac{\cos(\theta - \omega + a) \cos(\theta - \omega)}{\cos a \cos b^2} + \frac{1}{\cos^2 \lambda} = 0, \\ & \cos(\theta - \omega + a) \cos(\theta - \omega + a) - 2 \cos(\theta - \omega) \cos a] + \frac{\cos^2 a \cos^2 b}{\cos^2 \lambda} = 0. \\ & \cos(\theta - \omega + a) \cos(\theta - \omega - a) = \frac{\cos^2 a \cos^2 b}{\cos^2 \lambda}, \\ & \cos^2(\theta - \omega) \cos^2 a - \sin^2(\theta - \omega) \sin^2 a = \frac{\cos^2 a \cos^2 b}{\cos^2 \lambda}. \end{aligned}$$

On déduit de là successivement

$$\begin{aligned} (135) \quad & \sin(\theta - \omega) = \frac{\cos a}{\cos \lambda} \sqrt{\cos^2 \lambda - \cos^2 b}, \\ & \cos(\theta - \omega) = \frac{\sqrt{\sin^2 a \cos^2 \lambda + \cos^2 a \cos^2 b}}{\cos \lambda}. \end{aligned}$$

Remettant ces valeurs dans (133), on obtient

$$(136) \quad e^{Ab} = \frac{R}{\cos^2 b \cos \lambda} (\sqrt{\sin^2 a \cos^2 \lambda + \cos^2 a \cos^2 b} - \sin a \sqrt{\cos^2 \lambda - \cos^2 b}).$$

on sous une forme équivalente

$$(137) \quad \theta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \left[\frac{R}{\cos \lambda \cos^2 b} (\sqrt{\sin^2 a \cos^2 \lambda + \cos^2 a \cos^2 b} - \sqrt{\sin^2 a \cos^2 \lambda - \sin^2 a \cos^2 b}) \right].$$

Comme d'ailleurs la relation (135) nous donne en même temps

$$(138) \quad \theta = \omega + \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\cos a}{\cos \lambda} \sqrt{\cos^2 \lambda - \cos^2 b} \right),$$

si nous égalons l'une à l'autre ces deux valeurs de l'azimut θ , nous obtenons enfin l'équation du sphéro-nautile entre R , ω , λ , et les constantes a , b . Mais il est inutile d'effectuer cette transcription.

140. En faisant dans l'équation en question $\lambda = 0$, nous obtiendrons celle de la trace équatoriale

$$\begin{aligned} & \omega + \operatorname{arc} \sin (\cos a \sin b) \\ &= \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \left[\frac{R}{\cos^2 b} (\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^2 b} \pm \sin a \sin b) \right]. \end{aligned}$$

Elle est formée de deux spirales logarithmiques égales à la directrice, mais déviées. On ne doit en effet, parmi les quatre combinaisons que fournissent les doubles signes des deux radicaux, prendre que les deux valeurs positives, sous peine de rendre le logarithme imaginaire.

Remarquons d'ailleurs que la valeur (138) ne commence à être réelle que pour des latitudes inférieures à $\lambda = b$. Telle est donc l'équation de la conhélice de contact entre le sphéro-nautile et le cône qui lui est circonscrit à partir du pôle.

141. Les expressions (136), (137), (138), équivalentes entre

elles, présentent une grande importance. Elles déterminent en effet, pour chaque point (R, ω, λ) de la surface, l'azimut θ du centre de la sphère qui l'y touche, ou encore (N^o 113) le pied de sa normale. La première de ces formules fournit cet azimut en fonction de R, λ ; la seconde en ω, λ .

La dernière (138) sera la plus utile. Si on la laisse sous sa précédente forme (135), elle exprime le sinus de l'appoint $\theta - \omega$ qu'il faut ajouter à la longitude ω de ce point N pour obtenir l'azimut correspondant θ du centre M ; et rien ne s'oppose à ce qu'on le construise à l'aide de la règle et du compas.

142. Les formules générales (117 à 121) donnent pour le sphéro-nautille

$$(139) \quad h = \frac{A e^{\lambda \theta} \sin^2 b}{\sqrt{1 + A^2}} = r \cos a \sin^2 b,$$

$$(140) \quad h = e^{\lambda \theta} \sin b \sqrt{\frac{1 + A^2 \cos^2 b}{1 + A^2}} = r \sin b \sqrt{1 - \cos^2 a \sin^2 b},$$

$$(141) \quad H = e^{\lambda \theta} \frac{1 + A^2 \cos^2 b}{A \sqrt{1 + A^2}} = r \frac{1 - \cos^2 a \sin^2 b}{\cos a},$$

$$(142) \quad H : h = \frac{r}{\cos a}.$$

L'angle a restant constant sur la spirale logarithmique, ces quatre éléments sont proportionnels au rayon vecteur.

Remarquons encore la valeur de l'angle c , que forment les rayons sphériques normaux avec le plan de la caractéristique, où les génératrices du cône circonscrit avec la tangente à la directrice

$$(143) \quad \sin c = \frac{h}{r} = \frac{h}{r \sin b} = \sin b \cos a.$$

Cet angle demeure donc constant, et le sphéro-nautille se trouve ainsi défini au moyen de trois éléments angulaires a, b, c , dont deux seulement restent arbitraires, le troisième leur étant relié par cette condition (143). Il convient pourtant de remarquer que deux d'entre eux, a et c , figurent d'eux mêmes sous leur aspect angulaire dans la conformation de la surface, tandis que b n'a été introduit qu'indirectement pour la plus grande facilité des calculs, en représentant sous la forme trigonomé-

trique $\sin b$ le coefficient vectoriel B. Au contraire les deux angles a et c caractérisent directement la manière dont le sphéro-nautille tourne en spirale ou s'épanouit en forme de cor.

143. Le lieu géométrique des centres M_1 des caractéristiques nous est fourni par les équations générales (86) (87)

$$r_1^2 = r^2 (1 - \cos^2 a \sin^4 b - 2 \cos^2 a \sin^2 b),$$

ce qui peut s'écrire

$$(144) \quad r_1 = r \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b},$$

et d'autre part

$$(145) \quad \sin(\theta - \theta_1) = \frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}.$$

On en déduit :

$$r_1 = \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b} \cdot \Lambda \left[\theta_1 + \arcsin \left(\frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}} \right) \right].$$

Ce lieu est d'après cela une spirale logarithmique identique à la directrice et déviée de l'angle

$$\begin{aligned} & \arcsin \left(\frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}} \right) \\ & - \frac{1}{2} \operatorname{tang} a \operatorname{Log} (\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b). \end{aligned}$$

Telle sera donc la nouvelle directrice du *nautille à front générateur circulaire oblique* identique au sphéro-nautille. L'inclinaison i (88) du front reste constante, avec la valeur

$$i = \frac{\pi}{2} - a - \arcsin \left(\frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}} \right).$$

Quant au nouveau rapport vectoriel du nautiloïde envisagé sous cet aspect, c'est celui du rayon k de la caractéristique (140) au rayon vecteur r_1 de la nouvelle directrice (144), à savoir

$$\sin b \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a \sin^2 b}{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}.$$

145. On voit ainsi que la trace du plan tangent peut se construire en joignant M_2t , ou M_2t' , ou tt' , selon la manière dont seront donnés ces trois points. Mais nous en obtenons également d'autres constructions en le considérant comme tangent à la sphère mobile, c'est-à-dire perpendiculaire à son rayon NM , qui est projeté sur l'équateur en nM . La trace du plan devant dès lors être perpendiculaire à cette projection, il suffira d'abaisser de M_2 , de t , ou de t' cette normale sur nM .

Remarquons en outre que la figure une fois établie pour un point N fait dorénavant partie de l'édifice géométrique, et peut servir tout le long de la conhélice de ce point en restant semblable à elle-même, et ne changeant de forme que de l'une à l'autre de ces courbes.

Au lieu de ce mouvement en conhélice, faisons parcourir à N sa caractéristique de D à D' en passant par le point maximum N_0 . Le plan tangent sera d'abord vertical, suivant la trace DM_2 . Il s'incline ensuite sur l'équateur, en même temps que sa trace tourne autour de M_2 , depuis M_2D jusqu'à la position moyenne M_2T_0 parallèle à DD' . En effet, pour le point N_0 , la trace t'_0 de la tangente de la génératrice s'éloigne à l'infini sur DD' . Le minimum de pente du plan tangent se trouve réalisé à ce moment; et il est égal à $N_0M_2M_1$ dans le plan vertical M_2M_1 . Cette inclinaison a donc pour tangente trigonométrique le rapport de N_0M_1 à M_2M_1 , c'est-à-dire de h à H , ou de h à k , ou enfin $\tan c$. Le minimum est donc égal à c . Au delà du point N_0 , une marche inverse se produit; le plan tangent se redresse progressivement, en pivotant autour de M_2 , jusqu'à une position verticale suivant M_2D' .

146. Les formules du sphéro-nautille se simplifient beaucoup lorsqu'il est équiradial. Mais au lieu de supposer dans chacune d'elles $b = \frac{\pi}{2}$, il sera plus court de repartir des relations (124), (125) qui deviennent pour la spirale logarithmique

$$\omega = \theta - a - \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{2 \cos^2 k}{R} = \frac{1}{e^{\Lambda \theta} \sin a},$$

d'où, en éliminant θ

$$(146) \quad \frac{R}{2 \sin a \cos^2 k} = e^{\Lambda \left(\omega - \frac{\pi}{2} + a \right)},$$

équation très simple du sphéro-nautilé équiradial.

Il a pour trace

$$(147) \quad R = 2 \sin a . e^{A \left(m + \frac{\pi}{2} - a \right)},$$

c'est-à-dire une spirale logarithmique unique [au lieu de deux comme à l'ordinaire (N° 139)], identique à la directrice, et déviée de l'angle

$$\frac{\pi}{2} - a + \text{tang } a \text{ Log } (2 \sin a).$$

La seconde s'est évanouie et réduite au pôle, où se trouve en effet constamment l'une des deux *retombées* de la voute en plein cintre formée par la demi-caractéristique, tandis que la seconde décrit la courbe (147).

Comme le point le plus haut N_0 de ce plein cintre se projette au milieu du diamètre de cette circonférence, qui forme le rayon vecteur de la trace (147), le lieu des projections de ces points maxima des caractéristiques sera la spirale

$$(148) \quad R = \sin a . e^{A \left(m + \frac{\pi}{2} - a \right)},$$

égale à la directrice et déviée de l'angle

$$\frac{\pi}{2} - a + \text{tang } a . \text{Log } \sin a.$$

La *ligne de faite* qui lui correspond sur la surface, en passant par tous les points maxima eux-mêmes, est donc une conchélée. Son angle constant de latitude est fourni par la combinaison des équations (148) et (146), qui donne

$$2 \cos^2 \lambda_0 = 1, \quad \cos \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_0 = \frac{\pi}{4}.$$

§ XXIII

Cônes circonscrits

147. Cherchons le lieu géométrique des sommets (N° 106) des cônes circonscrits à une sphère quelconque, ainsi qu'à

déjà que l'expression (121) de $H + h$ était alors indépendante de cet indice; il en sera donc de même du lieu en question.

Il vient en effet

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{r}{\cos a} \right)^2 - 2r \left(\frac{r}{\cos a} \right) \cos a = r^2 \tan^2 a,$$

$$r_2 = r \tan a = \frac{F^2}{F'},$$

et d'autre part

$$\sin(\theta - \theta_2) = \frac{r}{r_2} \tan a = 1,$$

$$(151) \quad \theta = \theta_2 + \frac{\pi}{2}.$$

d'où, par l'élimination de θ

$$(152) \quad r_2 = \frac{F^2 \left(\theta_2 + \frac{\pi}{2} \right)}{F' \left(\theta_2 + \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Pour simplifier encore cette équation du lieu géométrique des sommets, nous la rapporterons à un axe polaire perpendiculaire au précédent, en faisant

$$\theta'_2 = \theta_2 + \frac{\pi}{2},$$

d'où cette équation

$$r_2^2 = \frac{F_2(\theta'_2)}{F'(\theta'_2)}.$$

149. Mais une dernière simplification peut encore être apportée à ce résultat.

Convenons de formuler l'équation de la directrice au moyen de la valeur f de l'inverse $\frac{1}{r}$ du rayon vecteur, et non pas, comme jusqu'ici (100), par celle F de ce rayon lui-même, en

écrivait (1)

$$\frac{1}{r} = f(\theta).$$

Il suit de cette modification

$$f(\theta) = \frac{1}{F(\theta)}, \quad f'(\theta) = -\frac{F'(\theta)}{F^2(\theta)},$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{F'(\theta_2)}{F^2(\theta_2)} = -f'(\theta_2).$$

On voit donc que l'inverse du rayon vecteur du lieu des sommets est, sauf le signe, la dérivée de l'inverse du rayon vecteur de la directrice (en ayant bien soin de faire dépendre la fonction ainsi calculée, du nouvel azimut rapporté à un axe perpendiculaire).

150. Éclairons cette méthode de calcul par les exemples qui ont été déjà envisagés.

Soit d'abord la spirale logarithmique

$$r = Ae^{\lambda\theta}, \quad \frac{1}{r} = e^{-\lambda\theta}.$$

La dérivée est $-Ae^{-\lambda\theta}$. Nous écrirons par conséquent, en changeant le signe

$$\frac{1}{r_2} = Ae^{-\lambda\theta_2}, \quad r_2 = \tan \alpha \cdot e^{\lambda\theta_2} = e^{\left(\lambda\theta_2 + \frac{\pi}{2} + \tan \alpha \cdot \text{Log} \tan \alpha\right)}.$$

Le lieu des sommets est donc une spirale égale déviée (par rapport à l'ancien axe polaire) de l'angle

$$\frac{\pi}{2} + \tan \alpha \cdot \text{Log} (\tan \alpha).$$

(1) J'indiquerai plus loin (N° 173) comment ce même changement permet de donner une forme encore plus simple aux équations fondamentales (122 à 125) des sphérales équiradiales. Il m'a paru toutefois plus avantageux de conserver jusque là nos mêmes notations.

Soit, comme second exemple, la spirale sinusoïde

$$r^n = \cos^n \theta, \quad \frac{1}{r} = \cos^{-\frac{1}{n}} \theta.$$

La dérivée est $\sin n\theta \cdot \cos^{-\frac{n+1}{n}} \theta$. Nous poserons donc

$$\frac{1}{r_2} = \sin n\theta'_2 \cos^{-\frac{n+1}{n}} n\theta'_2, \quad r_2 = \frac{\cos^{-\frac{n+1}{n}} n\theta'_2}{\sin n\theta'_2}.$$

On obtient par exemple pour la parabole $\left(n = -\frac{1}{2}\right)$, une droite; pour le cercle $(n = 1)$, une cissoïde de **Dioclès**; pour la ligne droite $(n = -1)$, cette droite elle-même.

Envisageons encore les spirales algébriques

$$r = \theta^n, \quad \frac{1}{r} = \theta^{-n}.$$

La dérivée est $-n\theta^{-n-1}$. Nous écrivons donc

$$\frac{1}{r_2} n = \theta'_2{}^{-n-1}, \quad r_2 = \frac{\theta'_2{}^{n+1}}{n}.$$

Le lieu des sommets est d'après cela une autre spirale algébrique d'un ordre supérieur d'une unité à celui de la proposée.

Par exemple, la spirale hyperbolique $(n = -1)$ donne, comme lieu des sommets, un cercle $(n = 0)$.

Soit enfin l'équation des coniques rapportées à leur foyer

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2} (1 + e \cos \theta).$$

La dérivée est $-\frac{ae}{b^2} \sin \theta$, nous écrivons donc en changeant le signe

$$\frac{1}{r_2} = \frac{ae}{b^2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{e}{b^2} \cos \theta.$$

Le lieu cherché est d'après cela

$$r_2 \cos \theta = \frac{b^2}{e}.$$

c'est-à-dire la directrice relative au foyer considéré.

§ XXIV

Directrice en coordonnées intrinsèques

151. Reprenons ici l'usage des coordonnées intrinsèques, afin de pouvoir envisager les courbes qui déjà nous ont été accessibles par cette voie (§ XVI), et en déterminer les surfaces sphérales équiradiales, dans lesquelles le rayon sphérique reste, comme ci-dessus, constamment égal au rayon *vecteur* r de cette ligne par rapport à un certain pôle, encore bien qu'elle soit représentée par son équation naturelle, entre son rayon de courbure ρ et son angle de contingence

$$\rho = F(\varepsilon).$$

En faisant passer par ce pôle deux axes rectangulaires, nous aurons

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos \varepsilon, & dy &= ds \sin \varepsilon; \\ x &= \int_0^s \rho \cos \varepsilon d\varepsilon, & y &= \int_0^s \rho \sin \varepsilon d\varepsilon. \end{aligned}$$

La sphère qui a son centre au point (x, y) et comme rayon r , sera représentée, avec les coordonnées courantes X, Y, Z par l'équation

$$\begin{aligned} \left(X - \int_0^s F \cos \varepsilon d\varepsilon \right)^2 + \left(Y - \int_0^s F \sin \varepsilon d\varepsilon \right)^2 + Z^2 \\ = \left(\int_0^s F \cos \varepsilon d\varepsilon \right)^2 + \left(\int_0^s F \sin \varepsilon d\varepsilon \right)^2, \end{aligned}$$

ou en développant

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2 \left(X \int_0^s F \cos \varepsilon d\varepsilon + Y \int_0^s F \sin \varepsilon d\varepsilon \right) = 0.$$

Si l'on passe aux coordonnées mixtes, on obtient cette formule

$$(153) \quad \frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = \int_0^s F(\varepsilon) \cos(\varepsilon - \omega) d\varepsilon,$$

remarquable par sa grande simplicité et sa complète généralité.

Pour avoir l'enveloppe de cette sphère, prenons la dérivée par rapport au paramètre ε . Elle sera simplement

$$F(\varepsilon) \cos(\varepsilon - \omega) = 0.$$

Mais F ne saurait être annulé d'une manière permanente. Il nous faut donc poser

$$\cos(\varepsilon - \omega) = 0, \quad \varepsilon - \omega = \frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat est d'ailleurs conforme à ce qu'indique la figure 19 par son triangle OM_1A .

L'élimination est maintenant possible une fois pour toutes; et si nous reportons cette valeur de ε dans la formule (153), nous obtenons, pour la sphérale équiradiale d'une directrice quelconque, l'équation générale

$$(154) \quad \frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = \int_0^{\omega + \frac{\pi}{2}} F(\varepsilon) \cos(\varepsilon - \omega) d\varepsilon.$$

Le problème se trouve ainsi ramené aux quadratures.

152. Considérons comme exemple la cycloïde rapportée à son sommet

$$\rho = \cos \varepsilon.$$

Nous aurons successivement

$$\begin{aligned} \frac{2R}{\cos^2 \lambda} &= 4 \int_0^{\omega + \frac{\pi}{2}} \cos \varepsilon (\cos \varepsilon \cos \omega + \sin \varepsilon \sin \omega) d\varepsilon \\ &= \int_0^{\omega + \frac{\pi}{2}} [\cos \omega (1 + \cos 2\varepsilon) + \sin \omega \sin 2\varepsilon] d(2\varepsilon) \\ &= \left[\cos \omega (2\varepsilon + \sin 2\varepsilon) - \sin \omega \cos 2\varepsilon \right]_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\omega + \frac{\pi}{2}} \\ &= [\cos \omega (2\omega + \pi) - \cos \omega \sin 2\omega + \sin \omega \cos 2\omega] + \sin \omega \\ &= (2\omega + \pi) \cos \omega - \sin (2\omega - \omega) + \sin \omega, \end{aligned}$$

et enfin

$$\frac{R}{\cos^2 k} = \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right) \cos \omega.$$

On peut conduire un calcul semblable pour obtenir l'équation de la sphérale, absolument différente de celle-ci, qui serait déduite de la même directrice, rapportée non plus à son sommet mais à son point de rebroussement, sous la forme

$$\rho = \sin \varepsilon.$$

153. Envisageons maintenant l'épicycloïde rapportée, soit à son sommet, soit à son point de rebroussement, par l'une ou l'autre des équations

$$\rho = \cos q\varepsilon, \quad \rho = \sin q\varepsilon.$$

Il suffira pour effectuer l'intégration (154) de décomposer en somme de sinus ou de cosinus le produit de facteurs. Il faut toutefois excepter de cette analyse l'hypothèse $q = 1$, car l'intégration conduit à diviser par $q - 1$. C'est pour cette raison que nous avons considéré directement ce cas, qui est celui de la cycloïde.

154. On a pour la chaînette rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \varepsilon},$$

$$\int \frac{\cos(\varepsilon - \omega)}{\cos^2 \varepsilon} d\varepsilon = \frac{\sin \omega}{\cos \varepsilon} + \cos \omega \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\frac{R}{2 \cos^2 k} = -1 + \cos \omega \operatorname{Log} \left(-\cot \frac{\omega}{2} \right).$$

Il vient pour la tractrice rapportée à son point de rebroussement

$$\rho = \operatorname{tang} \varepsilon,$$

$$\int \operatorname{tang} \varepsilon \cos(\varepsilon - \omega) d\varepsilon = -\cos(\varepsilon - \omega) + \sin \omega \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\frac{R}{2 \cos^2 k} = \cos \omega + \sin \omega \operatorname{Log} \left(-\cot \frac{\omega}{2} \right).$$

On a encore pour la chaînette d'égale résistance rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos \varepsilon},$$

$$\int \frac{\cos(\varepsilon - \omega)}{\cos \varepsilon} d\varepsilon = \varepsilon \cos \omega - \sin \omega \operatorname{Log} \cos \varepsilon,$$

$$2 \frac{R}{\cos^2 k} = \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right) \cos \omega - \sin \omega \operatorname{Log} (-\sin \omega).$$

Ces diverses équations ne fournissent de valeurs réelles que pour les longitudes négatives; ce qui est d'ailleurs conforme à l'allure de ces trois directrices.

155. Envisageons enfin la développante de cercle d'ordre q , rapportée, ainsi que toutes les précédentes, à un même point de la circonférence. Elle a pour équation relative à ce point de rebroussement

$$\rho = \varepsilon^q.$$

L'intégration (154) de la fonction $\varepsilon^q \cos(\varepsilon - \omega)$ s'effectuera par parties, en réduisant successivement la valeur de l'exposant, qui est essentiellement positif. Il est inutile de développer ici ce procédé classique.

Je m'attacherai de préférence à déduire de cette même courbe une autre sphérale équiradiale absolument différente, en rapportant les rayons vecteurs au centre du cercle, et non plus au point de rebroussement. La configuration générale de la surface en acquièrera d'ailleurs plus d'harmonie.

Appelons à cet effet α l'azimut du point du cercle générateur qui (par une série de tangentes successivement rectangulaires les unes sur les autres, pour passer de chaque développante à la suivante), nous conduit au point caractérisé par ε sur la q^e développante. Les coordonnées rectangulaires de ce dernier peuvent s'exprimer de la manière suivante

$$x = \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \cos \left(\alpha - k \frac{\pi}{2} \right), \quad y = \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \sin \left(\alpha - k \frac{\pi}{2} \right).$$

L'équation entre X, Y, Z de la sphère variable (après qu'on l'a, comme au N^o 151, développée et débarrassée de la somme des

séries Σ qui se trouvent dans les deux membres), se réduit à

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \cos \left(\alpha - k \frac{\pi}{2} \right) \\ - 2Y \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \sin \left(\alpha - k \frac{\pi}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

ou en coordonnées mixtes

$$\begin{aligned} \frac{R}{2 \cos^2 k} = \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \left[\cos \omega \cos \left(\alpha - k \frac{\pi}{2} \right) + \sin \omega \sin \left(\alpha - k \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ = \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \cos \left(\alpha - \omega - k \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport au paramètre angulaire α

$$\begin{aligned} 0 = \sum_0^q \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} \cos \left(\alpha - \omega - k \frac{\pi}{2} \right) - \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \sin \left(\alpha - \omega - k \frac{\pi}{2} \right) \\ = \sum_0^q \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} \cos \left(\alpha - \omega - k \frac{\pi}{2} \right) + \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \cos \left[\alpha - \omega - (k+1) \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Or le terme en α^{k-1} de la seconde somme a pour argument $\alpha - \omega - (k+1) \frac{\pi}{2}$. Cet angle diffère de $\frac{\pi}{2}$ avec celui du terme correspondant de la première série. Leurs cosinus sont donc égaux et de signes contraires, et ces deux expressions se détruisent mutuellement. Il ne subsiste par conséquent, de tout l'ensemble, que l'unique terme en α^q de la seconde somme, car il n'a pas de correspondant. La formule se réduit dès lors à

$$\cos \left[\alpha - \omega - (q+1) \frac{\pi}{2} \right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha - \omega - (q+1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha - \omega = q \frac{\pi}{2}.$$

L'équation de la sphère équiradiale devient par la substitu-

tion de cette valeur dans celle de la sphère

$$\frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = \sum_0^q \frac{\left(\omega + q \frac{\pi}{2}\right)^k}{k!} \cos(q-k) \frac{\pi}{2}.$$

Rapportons la, pour plus de simplicité, à un premier-méridien que nous aurons fait tourner, dans le sens négatif, de q quadrants. Si nous appelons Ω cette nouvelle longitude

$$\Omega = \omega + q \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \Omega,$$

il viendra simplement

$$\frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = \sum_0^q \frac{\Omega^k}{k!} \cos(q-k) \frac{\pi}{2}.$$

La trace équatoriale ($\lambda = 0$) de cette sphérale sera donc

$$\frac{R}{2} = \sum_0^q \frac{\Omega^k}{k!} \cos(q-k) \frac{\pi}{2}.$$

Cette équation présente une forme très simple; car le facteur

$\cos(q-k) \frac{\pi}{2}$ a toujours pour valeur l'unité avec des signes alternatifs.

Tous les termes $\frac{\Omega^k}{k!}$ seront donc de même parité, de signes alternés, et sans coefficients étrangers.

Si l'on considère en particulier (fig. 22) la développante de cercle proprement dite ($q=1$), la trace équatoriale devient

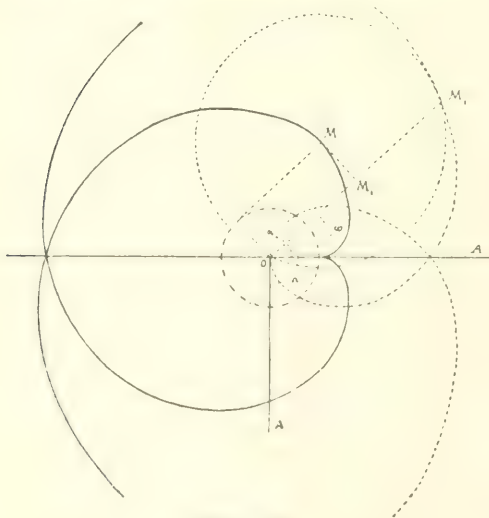


Fig. 22

$$R = 2\Omega,$$

c'est-à-dire une spirale d'ARCHIMÈDE.

QUATRIEME PARTIE

Lignes de courbure, surfaces podaires

§ XXV

Lignes de courbure en coordonnées rectangulaires

156. Si l'on envisage les normales communes à une sphérale et à la sphère qui s'y raccorde suivant une caractéristique, elles forment un cône de révolution, dont le sommet occupe le point décrivant de la directrice. Ces droites se rencontrent donc consécutivement, et par suite la caractéristique est l'une des deux lignes de courbure en chacun de ses points.

La seconde doit être normale à celle-ci. Nous possédons par conséquent, dans le plan tangent, qui nous est connu, les deux directions des sections principales.

La tangente de la seconde ligne de courbure n'est autre que la génératrice NM_2 du cône de révolution circonscrit suivant la caractéristique. Cette droite se trouve en effet dans le plan tangent, et elle est normale au cercle de base du cône.

Connaissant ainsi la direction nM_2 de la tangente à la projection équatoriale de la ligne de courbure, nous pouvons entreprendre d'en former l'équation différentielle. Je traiterai cette question successivement en coordonnées rectangulaires, et dans le système polaire.

157. La sphérale nous est fournie par les deux équations (83), (84). Cette dernière représente le plan de la caractéristique qui correspond à l'abscisse α du point décrivant M. Si donc nous menons par l'origine un plan qui lui soit parallèle, il aura pour équation

$$X + YF = 0.$$

Quant au plan tangent de la sphérale, il est perpendiculaire au rayon de la sphère, dont les cosinus directeurs sont proportionnels aux différences respectives des coordonnées (x, y, z) du point N, et de celles $(\alpha, F, 0)$ du centre M. Tels seront

donc les coefficients angulaires de l'équation du plan tangent

$$(155) \quad (x - \alpha) X + (y - F) Y + zZ = 0.$$

L'ensemble de ces deux relations représente la parallèle menée par l'origine à la tangente de la caractéristique, et l'on peut le mettre sous la forme

$$\frac{X}{zF'} = \frac{Y}{-z} = \frac{Z}{(y - F) - (x - \alpha)F'}.$$

Élevons par l'origine le plan perpendiculaire

$$zF'X - zY + [y - F - (x - \alpha)F']Z = 0.$$

Il sera parallèle au plan qui serait conduit par N de manière à couper le plan tangent suivant la tangente de la ligne de courbure. L'ensemble de cette égalité et de (155) représente par conséquent la parallèle à cette tangente.

Nous en obtiendrons la projection équatoriale par l'élimination de Z entre ces deux formules, ce qui donne

$$\begin{aligned} X \{ (x - \alpha) [y - F - (x - \alpha)F'] - z^2F' \} \\ + Y \{ (y - F) [y - F - (x - \alpha)F'] + z^2 \} = 0. \end{aligned}$$

De là le coefficient angulaire de la projection horizontale de la tangente cherchée

$$(156) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x - \alpha) [y - F - (x - \alpha)F'] - z^2F'}{(y - F) [y - F - (x - \alpha)F'] + z^2}.$$

La ligne de courbure étant située sur la sphérale, les quatre quantités x , y , z , α doivent satisfaire à la fois aux deux équations (83), (84) qui la représentent. Nous sommes donc autorisés à en déduire z et α , pour en opérer ici la substitution. Celle de z peut se faire une fois pour toutes. Elle donne après toutes les réductions

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y - F) [x - \alpha] + (y - F)F'}{(x - \alpha) [x - \alpha] + (y - F)F'} - \frac{z^2F'}{z^2},$$

expression que l'on peut encore simplifier au moyen de l'équa-

tion (83) sous la forme définitive

$$(157) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(y-F)\varphi' + \varphi F'}{(x-a)\varphi' + \varphi}.$$

Si maintenant, lorsque seront spécifiées dans chaque cas les fonctions F et φ , on résout cette même relation (83) par rapport à α pour en substituer ici la valeur, on aura, entre x , y , dx , dy , l'équation différentielle du premier ordre et du premier degré de la projection équatoriale de la seconde ligne de courbure de la sphérale.

158. Dans le cas le plus général, la trace de cette surface doit être l'une de ces lignes de courbure: car elle coupe orthogonalement, en raison de la symétrie de la figure par rapport à l'équateur, toutes les caractéristiques, aux points où elles traversent ce plan.

On peut le reconnaître dans nos formules. Si l'on fait en effet $z=0$ dans l'équation (156), elle donne pour les points situés dans l'équateur

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-z}{y-F},$$

$$(x-z)dx + (y-F)dy = 0,$$

montrant ainsi que l'élément de cette ligne, (de composantes dx , dy), est normal à la droite qui joint le point considéré (x, y) au centre (α, F) du grand cercle de la sphère. La ligne de courbure est donc tangente à ce cercle, dont l'enveloppe constitue la trace de la sphérale.

159. Convenons transitoirement de représenter pour abréger par les lettres G, H, K, L, M, N diverses fonctions de α qui nous sont connues. L'équation différentielle (157) pourra s'écrire

$$(x\varphi' + G)dy = (y\varphi' + H)dx,$$

D'autre part la relation (84) prend la forme

$$x = -yF' + K,$$

$$dx = -F'dy - (yF'' + K')dz,$$

..

d'où, en substituant,

$$(-yF'\varphi' + L)dy = (y\varphi' + H)[-F'dy - (yF'' + K')]\alpha.$$

Il est très important de remarquer que le terme

$$-yF'\varphi'dy,$$

se trouve à la fois dans les deux membres et disparaît de lui-même. Il reste alors une équation différentielle de la forme

$$(158) \quad M \frac{dy}{dx} + \varphi' F'' y^2 + Ny - HK' = 0.$$

Les équations de ce type ont été intégrées par EULER, mais seulement dans le cas où l'on possède directement une solution particulière. Si nous supposons l'intégration effectuée avec une constante arbitraire C , cette valeur de y fournira, au premier degré, celle de x d'après la relation (84), et la projection de la ligne de courbure se trouvera représentée par les expressions des deux coordonnées en fonction de α . Lorsque l'élimination de ce dernier sera possible, on obtiendra l'équation définitive de cette famille de courbes, dont le paramètre sera C , de même que α est celui de la première.

160. Dans plusieurs cas très étendus, la restriction d'EULER disparaît, et nous pouvons d'une manière générale ramener aux quadratures l'intégration de l'équation (158).

C'est d'abord lorsque le terme en y^2 s'évanouit, ce qui peut arriver de deux manières.

En premier lieu, pour $\varphi' = 0$, ou $\varphi = \text{const.}$; ce qui se rapporte aux surfaces-tuyaux de directrices quelconques.

En second lieu, pour $F'' = 0$, c'est-à-dire $F = m\alpha + n$, indiquant une directrice rectiligne, quelle que soit la loi du rayon sphérique. En un mot, c'est le cas des surfaces de révolution de méridienne quelconque.

Dans ces deux circonstances, nous nous trouvons ramenés à une équation linéaire en y , que l'on sait intégrer au moyen de deux quadratures.

La seconde simplification de l'équation différentielle (158) concerne la disparition du terme indépendant de y ; ce qui peut encore arriver de deux manières.

D'abord pour $K' = 0$, ou $K = \text{const.}$ Cette circonstance est

facile à formuler⁽¹⁾; mais ne semble pas mériter de retenir l'attention.

Il reste enfin la seconde solution $\Pi = 0$, ou, en se reportant à l'équation (157)

$$F\varphi' - \varphi F' = 0, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{F'}{F}, \quad \text{Log } \varphi = \text{Log } F + \text{Log } B, \\ \varphi = BF,$$

c'est-à-dire précisément la condition vectorielle, avec une directrice et un module B quelconques.

Dans ces deux derniers cas, l'équation différentielle (158) devient

$$M \frac{dy}{dx} + \varphi' F'' y^2 + N y = 0,$$

ou, en la divisant par y^2

$$M \left(\frac{dy}{dx} \right) + N \left(\frac{1}{y} \right) + \varphi' F'' = 0,$$

équation linéaire par rapport à $\frac{1}{y}$.

(1) Si l'on se reporte à la relation (84) pour préciser la forme de la fonction K , il vient, en représentant

par $\frac{g}{2}$ la valeur de la constante

$$K = z + FF' - \varphi\varphi' = \frac{g}{2},$$

$$2\varphi\varphi' = 2FF' + 2z - g,$$

$$\varphi^2 = F^2 + z^2 - gz.$$

Portons en OG (fig. 23) la longueur g , et par le point fixe G menons la verticale GH jusqu'à la rencontre de la circonférence décrite sur $OP = z$ comme diamètre. Nous aurons en GP la longueur $z - g$, et en PH la moyenne géométrique entre z et $z - g$. En rabattant ce segment en PK , on obtiendra dans le carré de l'hypoténuse MK la somme des carrés $MP^2 = F^2$, et $PK^2 = z(z - g)$, c'est-à-dire φ^2 . Telle est donc la construction du rayon sphérique $\varphi = MK$.

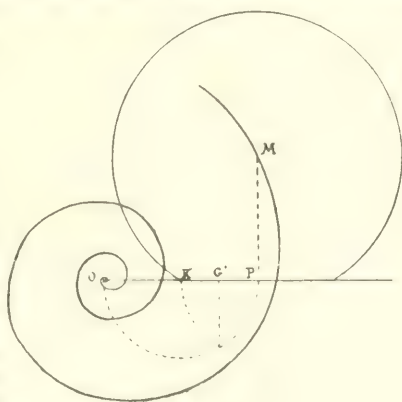


Fig. 23

161. Attachons nous au cas des sphères vectorielles pour le développer complètement. Le coefficient B disparaît de lui-même de l'équation (157) qui se réduit à

$$(xF' + F - \alpha F') dy = F' y dx,$$

tandis que (84) devient de son côté

$$(159) \quad \begin{aligned} x &= -yF' + \alpha + FF' \cos^2 b, \\ dx &= -F' dy + d\alpha - yF'' + 1 + (FF'' + F'^2) \cos^2 b. \end{aligned}$$

Il vient dès lors en substituant

$$F(1 + F'^2 \cos^2 b) \frac{dy}{d\alpha} = F'y [-yF'' + 1 + (FF'' + F'^2) \cos^2 b],$$

d'où, en divisant par y^2

$$\frac{F}{F'} (1 + F'^2 \cos^2 b) \frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{d\alpha} + [1 + (FF'' + F'^2) \cos^2 b] \left(\frac{1}{y}\right) - F'' = 0.$$

L'intégrale de cette équation linéaire obtenue par la méthode classique donne

$$(160) \quad y = \frac{\int \frac{F' + 1 + (FF'' + F'^2) \cos^2 b}{F' (1 + F'^2 \cos^2 b)} d\alpha}{C + \int \frac{F' F''}{F' (1 + F'^2 \cos^2 b)} d\alpha + \int \frac{F' (1 + (FF'' + F'^2) \cos^2 b)}{F' (1 + F'^2 \cos^2 b)} d\alpha},$$

et l'équation de la seconde famille de lignes de courbure résultera de l'élimination de α entre (159) et (160), lorsque sera spécifiée la fonction F.

162. Pour présenter une application de cette méthode, considérons la parabole

$$y = x^2, \quad F = \alpha^2, \quad F' = 2\alpha, \quad F'' = 2.$$

La première quadrature est alors

$$\int \frac{2d\alpha}{\alpha} + \frac{1 + 6\alpha^2 \cos^2 b}{1 + 4\alpha^2 \cos^2 b} = \text{Log}(\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 \cos^2 b).$$

La seconde devient d'après cela

$$\int \frac{4a da}{\sqrt{1 + 4a^2 \cos^2 b}} = \frac{\sqrt{1 + 4z^2 \cos^2 b}}{\cos^2 b}.$$

L'intégrale de l'équation différentielle est donc

$$(161) \quad y = \frac{z^2 \cos^2 b \sqrt{1 + 4z^2 \cos^2 b}}{C + \sqrt{1 + 4z^2 \cos^2 b}}.$$

Il vient dès lors (159)

$$x = z \sqrt{\frac{2Cz^3 \cos^2 b}{C + \sqrt{1 + 4z^2 \cos^2 b}}}.$$

L'équation (161) est du sixième degré à puissances paires de z , et peut par conséquent être résolue à l'aide des expressions du troisième degré. Il suffira de les substituer dans cette dernière relation, pour avoir entre x , y , C l'équation de la seconde famille de lignes de courbure, quelque soit le module vectoriel b .

163. Attachons nous spécialement au cas des sphères *équilatères*, pour lesquelles le rayon sphérique reste constamment égal à l'ordonnée de la directrice.

Si nous faisons $\cos b = 0$, les deux quadratures peuvent s'effectuer *quelle que soit cette directrice*. La première devient en effet

$$\int \frac{F'}{F} dz = \text{Log } F, \quad \int \frac{F'}{1 - F'^2} dz = F,$$

et la seconde se réduit dès lors à

$$\int F F' dz = \frac{F^2}{2}.$$

L'intégrale de l'équation linéaire devient donc entièrement explicite

$$(162) \quad y = \frac{2F}{F^2 + C}.$$

De son côté, la relation (159) se réduit à

$$(163) \quad x = z - yF'.$$

Telles sont les deux équations finies entre lesquelles il suffira d'éliminer z .

164. Reprenons comme exemple de sphérale équilatère la parabole ⁽¹⁾

$$y = x^2, \quad F = x^2, \quad F' = 2x.$$

Les formules (162) (163) nous donnent alors

$$y = \frac{2x^2}{4x^2 + C}, \quad x = z - \frac{4x^3}{4x^2 + C} = \frac{Cz}{4x^2 + C},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2x}{C}, \quad z = \frac{Cy}{2x}, \quad y = \frac{Cy^2}{2(Cy^2 + 2x^2)},$$

et finalement

$$\frac{x^2}{C} + y^2 - \frac{y}{2} = 0.$$

Pour $C = 1$, et $C = \infty$, nous retrouvons distinctement les deux parties constitutives de la trace équatoriale (N° 128) de la sphérale étudiée ci-dessus, à savoir (N° 132) le cercle qui a son centre au foyer de la parabole (fig. 18), et la tangente au sommet.

Les autres valeurs de C donnent des ellipses ayant pour petit axe le diamètre de ce cercle dirigé suivant l'axe de la parabole.

Si l'on reporte cette valeur de x^2 dans l'équation (105) de la sphérale, il vient

$$z = y \sqrt{C - 1}.$$

(1) On ne doit pas en effet chercher la solution de ce cas limite dans la formule (161), en y faisant $\cos b = 0$; car nous avons été, au cours des calculs, conduits à diviser par $\cos b$.

Je ne m'arrêterai pas à développer un exemple analogue relatif à la parabole cubique $y = x^3$. L'équation (163) se réduit alors au second degré.

Les lignes de courbure sont donc renfermées dans une série de plans se mouvant à charnière autour de la tangente au sommet de la parabole directrice, depuis celui de l'équateur jusqu'à la position verticale. Elles sont par conséquent elles-mêmes des ellipses.

Leurs projections sur ce dernier plan seront donc encore d'autres ellipses, que l'on obtiendrait en substituant cette dernière valeur de γ dans l'égalité (105).

On voit dès lors que cette sphérale équilatère fait partie du groupe des surfaces qui admettent deux systèmes plans de lignes de courbure.

§ XXVI

Lignes de courbure en coordonnées polaires

165. Reprenons la même recherche pour les sphérales vectorielles rapportées à des coordonnées polaires: à savoir r, θ pour le point décrivant M de la directrice; R, ω pour le point n qui parcourt la projection équatoriale de la seconde ligne de courbure; R, ω, λ pour le point N de la sphérale dans l'espace.

Nous avons vu que la recherche de l'équation de cette surface revient à l'élimination de θ entre les relations générales (110), (111). Nous admettons donc qu'an cours de cette opération, l'on a obtenu, en fonction des coordonnées R, ω, λ de N, l'expression de l'azimut θ du centre M de la sphère qui s'y raccorde ⁽¹⁾.

La tangente à la projection de la ligne de courbure étant nM_2 (fig. 21), l'équation différentielle de cette courbe pourra s'écrire

$$(164) \quad \frac{R d\omega}{dR} = \tan g \text{ On } M_2 = \tan g \text{ (M}_1 n \text{ M}_2 - \text{M}_1 n \text{ O)} ,$$

à la condition d'en exprimer le second membre en R, ω seulement.

Puisque le point N appartient à la caractéristique de rayon k

(1) Les valeurs (136), (137), (138) nous en fournissent un exemple en ce qui concerne le sphéro-nautil.

et de coordonnées ξ, z , nous avons

$$(165) \quad \text{tang } M_1 n M_2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 n} = \frac{H}{\xi} = \frac{H}{\sqrt{k^2 - z^2}} = \frac{H}{\sqrt{k^2 - R^2 \text{ tang}^2 \lambda}},$$

En second lieu, le triangle $M_1 n O$ nous donne, par la proportion des sinus

$$(166) \quad \frac{R}{r_1} \sin M_1 n O = \sin O M_1 n = \sin O M_1 B' \\ = \cos O M_1 M_2 = \cos (O M M_2 + M O M_1) = \cos (a + \theta - \theta_1).$$

L'angle a se déduira de l'équation de la directrice en fonction de θ . Quant à r_1 et θ_1 , ils ont été déjà exprimés de même (86), (87), ainsi que H et k (118, 120).

En remettant dans la formule (164) toutes ces valeurs, et finalement celle de θ dont nous venons de parler ci-dessus, ainsi que celle de λ déduite de l'équation de la sphérale, il restera définitivement entre $R, \omega, dR, d\omega$ l'équation différentielle du premier ordre et du premier degré de la projection équatoriale de la seconde ligne de courbure.

166. Développons cette marche pour le sphéro-nautille.

Je commence par rappeler les formules obtenues à son sujet, en me contentant de représenter dans chacune d'elles par des abréviations C_1, C_2, \dots , les diverses constantes dont nous possédons explicitement l'expression en fonction de a et b ; ainsi que par F_1, F_2, \dots , diverses fonctions également connues.

Nous avons trouvé au N° 141

$$(139 \text{ bis}) \quad h = r \cos a \sin^2 b = C_1 r,$$

$$(140 \text{ bis}) \quad k = r \sin b \sqrt{1 - \cos^2 a \sin^2 b} = C_2 r,$$

$$(141 \text{ bis}) \quad H = r \frac{1 - \cos^2 a \sin^2 b}{\cos a} = C_3 r,$$

$$(144 \text{ bis}) \quad r_1 = r \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b} = C_4 r,$$

$$(145 \text{ bis}) \quad \theta - \theta_1 = \text{arc sin} \left(\frac{\sin a \cos a \sin^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}} \right) = C_5.$$

et enfin (N° 163)

$$(166 \text{ bis}) \quad \sin M_1 n O = \frac{r_1}{R} \cos(a + \theta - \theta_1),$$

$$= C_4 \frac{r}{R} \cos(a + C_3) = C_6 \frac{r}{R},$$

$$\operatorname{tang} M_1 n O = \frac{C_6 r}{\sqrt{R^2 - C_6^2 r^2}},$$

$$(165 \text{ bis}) \quad \operatorname{tang} M_1 n M_2 = \frac{H}{\sqrt{h^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}} = \frac{C_3 r}{\sqrt{C_2^2 r^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}}.$$

L'équation différentielle devient d'après cela

$$(164 \text{ bis}) \quad R \frac{d\omega}{dR} = r \frac{C_3 \sqrt{R^2 - C_6^2 r^2} - C_6 \sqrt{C_2^2 r^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}}{C_3 C_6 r^2 + \sqrt{(R^2 - C_6^2 r^2)(C_2^2 r^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 \lambda)}}.$$

Représentons la en abrégé par

$$\frac{R d\omega}{dR} = F_1(r, R, \lambda).$$

Elle renferme encore θ par le facteur r , en outre des coordonnées R , ω , λ . Mais nous possédons deux expressions de ce paramètre (N° 138) à savoir

$$(137 \text{ bis}) \quad \theta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \left| \frac{R}{\cos \lambda \cos^2 b} \sqrt{\sin^2 a \cos^2 \lambda + \cos^2 a \cos^2 b} \right. \\ \left. - \sqrt{\cos^2 a \cos^2 \lambda - \sin^2 a \cos^2 b} \right| = F_2(R, \lambda),$$

ainsi que

$$(138 \text{ bis}) \quad \theta = \omega + \arcsin \left(\frac{\cos a}{\cos \lambda} \sqrt{\cos^2 \lambda - \cos^2 b} \right) = \omega + F_3(\lambda).$$

Cette dernière nous permet de chasser transitoirement ω pour conserver seulement λ . Elle donne en effet

$$d\omega = d\theta - F_3(\lambda) d\lambda = \left(\frac{\partial F_2}{\partial R} dR + \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} d\lambda \right) - F_3(\lambda) d\lambda.$$

Elle nous donne immédiatement

$$\frac{R d\omega}{dR} = \text{tang } OnM_2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 n} = \frac{H}{On - OM_1} = \frac{H}{R - r \sin \alpha}.$$

On a d'ailleurs

$$h = MM_1 = r \cos \alpha,$$

$$k = OM_1 = r \sin \alpha,$$

$$H = \frac{h^2}{k} = r \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha},$$

et par conséquent

$$\frac{R d\omega}{dR} = \frac{r \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - R - r \sin \alpha}.$$

Nous avons encore (126)

$$\sin \alpha = \frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

$$d\omega = \frac{F^2 + 2F'^2 + FF''}{F^2 + F'^2} d\theta,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{R d\theta}{dR} = \frac{F^2 + 2F'^2 + FF''}{F^2 + F'^2} = \frac{F^3}{F'(R \sqrt{F^2 + F'^2} + F^2)},$$

ou en renversant les fractions

$$\frac{F^2 + F'^2}{F^2 + 2F'^2 + FF''} \cdot \frac{dR}{d\theta} = \frac{F'}{F^3} R \sqrt{F^2 + F'^2} - \frac{F'}{F},$$

et en divisant par R

$$\frac{F}{F' \sqrt{F^2 + 2F'^2 + FF''}} \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\theta} - \left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\sqrt{F^2 + F'^2}}{F^2} = 0,$$

équation linéaire entre $\frac{1}{R}$ et θ .

Écrivons la sous la forme abrégée

$$d\left(\frac{1}{R}\right) - U \left(\frac{1}{R}\right) + V = 0,$$

en représentant par les coefficients U , V , ces fonctions de θ

$$U = \frac{F' - F^2 + 2F'^2 - FF''}{F^2 + F'^2}, \quad V = U \frac{F^2 + F'^2}{F^2}.$$

Elle aura pour intégrale

$$\frac{1}{R} = e^{\int U d\theta} \left(C - \int V e^{-\int U d\theta} d\theta \right).$$

Le problème se trouve donc ramené aux quadratures, et il ne restera plus qu'à éliminer θ dans chaque cas entre les deux équations

$$(168) \quad \begin{cases} R = \frac{e^{-\int U d\theta}}{C - \int V e^{-\int U d\theta} d\theta}, \\ \omega = \theta + \arctan \frac{F}{F'} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Si cette élimination reste impossible, nous possédons tout au moins les expressions explicites des deux coordonnées R , ω en fonction du paramètre auxiliaire θ .

168. Appliquons cette théorie au sphéro-nautilé équiradial, en traitant a comme une constante

$$\begin{aligned} F &= e^{\Lambda \theta}, & F' &= \Lambda e^{\Lambda \theta}, \\ F^2 + F'^2 &= \frac{e^{2\Lambda \theta}}{\sin^2 a}, & F^2 + 2F'^2 - FF'' &= \frac{e^{2\Lambda \theta}}{\sin^2 a}, \\ U &= \Lambda, & \int U d\theta &= \Lambda \theta, \\ V &= \frac{\Lambda e^{-\Lambda \theta}}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sin^2 a} e^{-\Lambda \theta}, \end{aligned}$$

$$\int V_t = \int^{(\theta)} d\theta = \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \int e^{-2\lambda\theta} d\theta = -\frac{e^{-2\lambda\theta}}{2 \sin \alpha}.$$

$$\frac{1}{R} = e^{\lambda\theta} \left(C - \frac{e^{-2\lambda\theta}}{2 \sin \alpha} \right),$$

$$R = \frac{2 \sin \alpha}{C e^{\lambda\theta} - e^{-\lambda\theta}},$$

$$\omega = \theta + \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \omega - \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

et enfin

$$(169) \quad R = \frac{2 \sin \alpha}{C e^{\lambda \left(\omega - \frac{\pi}{2} - \alpha \right)} - e^{\lambda \left(\omega - \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}}.$$

Pour $C=0$, l'on retrouve la spirale (147) trace équatoriale de cette sphérale; et pour $C=\infty$, le pôle lui-même, auquel se réduit, ainsi que nous l'avons vu (N^o 145), la seconde spirale-trace.

Avec toute autre valeur du paramètre C , on voit que R s'annule pour $\omega = \pm \infty$. La ligne de courbure est donc, dans ses deux sens, asymptote au pôle.

Elle comporte d'après cela un maximum d'éloignement de ce point, c'est-à-dire de la valeur de R , ou un minimum de son dénominateur. Et en effet le produit des deux termes qui le composent étant constant, leur somme atteint ce minimum au moment de leur égalité

$$C e^{\lambda \left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = e^{\lambda \left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)},$$

$$C = e^{-2\lambda \left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}.$$

Si donc, au lieu de C , nous adoptons pour constituer le paramètre arbitraire de la seconde famille des lignes de courbure, cet azimut ω_0 du *sommet* de la courbe, l'équation deviendra, en y remplaçant C par sa valeur

$$(170) \quad R = \frac{2 \sin \alpha \cdot e^{\lambda \left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}}{e^{\lambda (\omega - \omega_0)} - e^{-\lambda (\omega - \omega_0)}},$$

L'expression R_0 du rayon maximum est d'après cela (pour $\omega = \omega_0$)

$$(171) \quad R_0 = \sin a \cdot e^{A \left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - a \right)}.$$

Cette équation, si l'on y envisage R_0 et ω_0 comme des coordonnées courantes, représente le lieu géométrique des sommets. On y reconnaît celle de la projection de la ligne de faite (148).

Supposons que, pour étudier en son particulier chacune des lignes de courbure, on la rapporte à un axe polaire spécial pour elle, et passant par son sommet, il faudra it prendre à cet effet comme coordonnée azimutale

$$\Omega = \omega - \omega_0,$$

en déplaçant de l'angle ω_0 l'ancien axe polaire. L'équation de la projection prend alors cette forme très simple

$$R = \frac{2R_0}{e^{A\Omega} + e^{-A\Omega}}.$$

C'est celle de la *spirale de Poinsot*, ou de la projection de l'*herpolhodie-limite* qui correspond au cas où la distance du plan fixe au centre de l'ellipsoïde générateur est égale au demi-axe moyen de ce dernier.

La famille des secondes lignes de courbure du sphéro-nautile équiradial a donc la même projection équatoriale que ces herpolhodies spéciales, de rayons maxima gradués et disposés dans des directions progressivement variables.

La disposition des lignes de courbure elles-mêmes sur la surface devient dès lors très nette. En son point le plus élevé, chaque caractéristique est traversée normalement, et parallèlement à l'équateur par une de ces lignes, qui plonge à partir de là sur les deux versants, pour y serpenter d'une manière spiraloïde, asymptotiquement à l'équateur et au pôle.

169. Prenons comme second exemple la spirale sinusoïde

$$r^n = \cos n\theta,$$

$$F = \cos^{\frac{1}{n}} n\theta, \quad F' = -\cos^{\frac{1-n}{n}} n\theta \sin n\theta, \quad F'' = (\sin^2 n\theta - n) \cos^{\frac{4-2n}{n}} n\theta,$$

$$\frac{F}{F'} = -\cot n\theta, \quad V F^2 + F'^2 = \cos^{\frac{4-n}{n}} n\theta,$$

$$F'^2 + 2F'^2 - FF' = (n+1) \cos^{\frac{2(4-n)}{n}} n\theta,$$

$$U = -(n+1) \operatorname{tang} n\theta, \quad \int U d\theta = \frac{n+1}{n} \operatorname{Log} \cos n\theta,$$

$$\int V d\theta = \cos^{\frac{n+4}{n}} n\theta,$$

$$V = -(n+1) \sin n\theta \cos^{\frac{4-2n}{n}} n\theta, \quad V e^{-\int U d\theta} = (n+1) \sin n\theta \cos^{\frac{2-n}{n}} n\theta,$$

$$\int V e^{-\int U d\theta} d\theta = -\frac{1}{2} \cos^{2\frac{n+4}{n}} n\theta.$$

$$R = \cos^{\frac{n+4}{n}} n\theta \left[C - \frac{1}{2} \cos^{2\frac{n+4}{n}} n\theta \right],$$

et enfin

$$R = \frac{2 \cos^{\frac{n+4}{n}} n\theta}{1 + 2C \cos^{2\frac{n+4}{n}} n\theta}.$$

On a d'autre part (124)

$$\operatorname{tang} (\theta - \omega) = \frac{F}{F'} = -\operatorname{tang} n\theta,$$

$$\theta - \omega = -n\theta, \quad \theta = \frac{\omega}{n+1},$$

et par conséquent l'équation définitive

$$(172) \quad R = \frac{2 \cos^{\frac{n+4}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \omega \right)}{2C \cos^{2\frac{n+4}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \omega \right) + 1}.$$

Pour $C=0$, l'on retrouve la trace horizontale (128) de la sphérale.

170. Considérons enfin la spirale algébrique

$$F = \theta^n, \quad F' = n\theta^{n-1}, \quad F'' = n(n-1)\theta^{n-2},$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{\theta}{n}, \quad \sqrt{F'^2 + F''^2} = \theta^{n-1} \sqrt{\theta^2 + n^2},$$

$$F'^2 + 2FF'' - FF''' = \theta^{2n-2} [\theta^2 + n(n+1)],$$

$$U = \frac{n}{\theta} \left(1 + \frac{n}{\theta^2 + n^2} \right),$$

$$\int U d\theta = (n+1) \text{Log } \theta - \text{Log} (\sqrt{\theta^2 + n^2}),$$

$$e^{\int U d\theta} = \frac{\theta^{n+1}}{\sqrt{\theta^2 + n^2}},$$

$$V = \frac{n(\theta^2 + n^2 + n)}{\sqrt{\theta^2 + n^2}} \theta^{-n-2}, \quad V e^{\int U d\theta} = n(\theta^2 + n^2 + n) \theta^{-2n-3},$$

$$\int V e^{\int U d\theta} d\theta = -\frac{\theta^2 + n^2}{2\theta^{2n+2}},$$

et enfin

$$(173) \quad R = \frac{2\theta^n + 4\sqrt{\theta^2 + n^2}}{\theta^2 + n^2 + 2C\theta^{2n+2}}.$$

Il arrive donc cette circonstance singulière que l'intégration vient de réussir, quelque soit n , tandis que ce n'est que pour un nombre limité de cas spéciaux, bien qu'assez notable, que la résolvante (129) se prête à nous procurer l'équation de la sphérale. Contentons nous de rappeler les deux plus simples.

L'hypothèse $n = 0$ nous fournit une vérification. En effet elle indique comme directrice le cercle $R = 1$. La sphérale est donc un tore équiradial. Ses secondes lignes de courbure sont ses parallèles. Or la résolvante (129) donne ici $\theta = 0$, ce qui réduit

à $R = \frac{1}{C}$ l'équation (173), et fournit ainsi en effet la famille des cercles appelés parallèles.

Pour obtenir un résultat nouveau, prenons encore la valeur $n = -1$, qui correspond à la spirale hyperbolique. Nous avons déterminé sa sphérale équiradiale (132). L'équation (173) donne alors

$$R^2 = \frac{4(\theta^2 - 1)}{(\theta^2 + 1 + 2C)^2}.$$

et l'on en déduit la valeur

$$(174) \quad \theta = \sqrt{\frac{2}{R^2 - (2C + 1)}} \pm \frac{2}{R} \sqrt{\frac{1}{R^2 - 2C}},$$

qu'il suffit de substituer dans la formule (130), pour obtenir, entre R et ω , la projection équatoriale des lignes de courbure.

171. Les sphérales équiradiales jouissent, pour leurs lignes de courbure, d'une importante propriété.

Marquons (fig. 25) en OAC , OA_1C_1 , $OA''_2C''_2$, ..., une

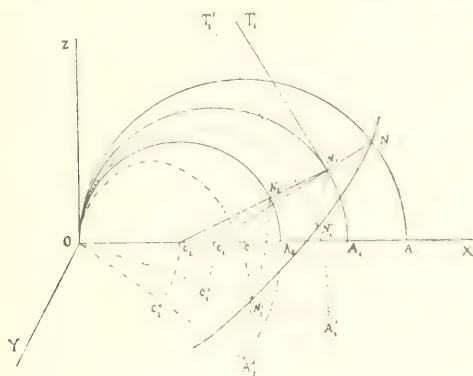


Fig. 25

suite de caractéristiques infiniment voisines. Ramenons les toutes au moyen de rotations C_1C_1 , C''_2C_2 , ..., autour de l'axe zénithal, dans un même plan méridien en OAC , OA_1C_1 , OA_2C_2 , Traçons dans ce plan la trajectoire orthogonale $NN_1N_2N_3$... de ces nouveaux cercles, et cherchons la relation de cette courbe avec la ligne de courbure $NN_1N'_2N'''_3$...

Le premier élément NN_1 est mené de N normalement à OA_1 , c'est-à-dire suivant le rayon NN_1C_1 . Le second sera N_1N_2 dirigé suivant le rayon $N_1N_2C_2$ du cercle consécutif, et ainsi de suite. Envisageons le plan $T_1N_1N_1$ formé par la tangente N_1T_1 de la circonférence OC_1A_1 et l'arc $N_1N'_1$ de la rotation qui amènerait cette dernière dans sa véritable situation $OC'_1A'_1$. Cet arc élémentaire est normal au méridien ZOA , par suite à NN_1 . D'autre part le rayon NN_1C_1 est perpendiculaire à la tangente N_1T_1 . Donc NN_1 est abaissé de N perpendiculairement au plan $T_1N_1N'_1$; en second lieu, à partir de N_1 l'on mène dans ce plan $N_1N'_1$

normal à la tangente N_1T_1 de la ligne de courbure située dans ce même plan. D'après le théorème des trois perpendiculaires, NN_1 sera normal à N_1T_1 , et devient dès lors l'élément de cette ligne qui doit, sur la surface, couper orthogonalement les caractéristiques. La relation du rayon vecteur de l'espace ON_1 avec sa latitude N_1OA_1 est donc, pour cette courbe, la même que celle des éléments correspondants ON_1 et N_1OA_1 de la trajectoire plane, puisqu'ils sont respectivement égaux. En d'autres termes, l'équation entre R et λ de la ligne de courbure (à joindre à celle de la sphérale pour représenter cette ligne) ne diffère pas de celle de la trajectoire plane qui relie ces mêmes éléments. Or celle-ci est immuable, et il suffit de la trouver une fois pour toutes: par conséquent *elle reste la même pour toutes les sphérales équiradiales, quelle que soit leur directrice.*

Rien de plus simple d'ailleurs que de déterminer cette trajectoire orthogonale des cercles qui, dans un même plan, passent par l'origine et ont leurs centres sur l'axe des abscisses. Ce sont les circonférences qui passent à l'origine et ont leurs centres sur l'axe des ordonnées. Traçons en effet (fig. 26) deux sem-

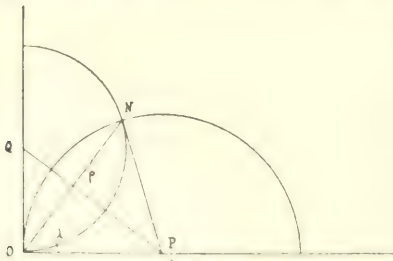


Fig. 26

blables cercles, ayant leurs centres en P et Q, et se coupant en N. Joignons NP, NQ, PQ. Les triangles PQN, PQO sont égaux comme ayant leurs trois côtés respectivement égaux. L'angle N est donc droit, comme l'est l'angle O. Par suite le rayon de l'un des cercles est perpendiculaire à celui de l'autre, c'est-à-dire tangent à ce dernier. Les deux circonférences sont dès lors orthogonales.

172. Désignons par C le rayon OQ de l'un de ces cercles, on aura pour son rayon vecteur de l'espace

$$\rho = ON = 2OQ \cos QON = 2C \sin \lambda.$$

Mais d'autre part le rayon vecteur horizontal a pour valeur

$$R = On = \rho \cos \lambda = 2C \sin \lambda \cos \lambda = C \sin 2\lambda.$$

Telle est l'équation qui, sur une sphérale équiradiale quelconque, relie les coordonnées R , λ de la seconde ligne de courbure, et qu'il suffit de joindre à celle de la sphérale pour

représenter cette courbe. Or elle appartient à une sphère de rayon C , tangente à l'équateur au pôle. On obtient donc, pour une sphérale équiradiale quelconque, toutes les lignes de courbure du second système en la coupant par la famille des sphères qui passent au pôle tangentiellement à l'équateur.

Pour avoir la ligne de courbure qui passe en un point déterminé N de la sphérale, c'est-à-dire le centre de la sphère qui doit la contenir, il suffit de couper l'axe zénithal par le plan normal à cette courbe, à savoir le plan perpendiculaire à la génératrice NM_2 du cône circonscrit.

On peut d'après cela déduire l'équation de la ligne de courbure de celle de la sphérale, en y remplaçant λ par la valeur ci-dessus

$$(175) \quad \sin 2\lambda = \frac{R}{C}.$$

D'ailleurs la latitude ne figure dans la formule (123) (d'où découle dans chaque cas l'équation de la sphérale elle-même) que par le facteur $\frac{R}{2 \cos^2 \lambda}$, qui prend la valeur

$$(176) \quad \frac{2 \cos^2 \lambda}{R} = \frac{R}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\lambda}} = \frac{CR}{C + \sqrt{C^2 - R^2}} \\ = \frac{C}{R} (C - \sqrt{C^2 - R^2}).$$

De là cette double conclusion :

1° L'on peut, si l'on possède l'équation de la sphérale équiradiale, éviter la double quadrature de la méthode précédente (N° 166), en se bornant à effectuer dans cette équation la substitution (176), qui procurera, entre R et ω , l'équation de la projection horizontale de la seconde famille, de paramètre C .

2° On peut inversement, s'il est impossible de déduire des formules (123) par élimination l'équation de la sphérale, ou si elle semble exiger des calculs plus compliqués, employer la méthode de la double quadrature pour obtenir entre R , ω , C l'équation équatoriale des lignes de courbure, puis alors y effectuer la substitution inverse (175)

$$C = \frac{R}{\sin 2\lambda},$$

pour avoir entre R , ω , λ l'équation de la sphérale.

Nous trouvons trois vérifications de ces deux énoncés en opérant, dans l'un et l'autre sens, le passage mutuel entre (127) et (172), (132) et (174), (146) et (169).

173. Je tiens à présenter en outre un exemple direct de la recherche des lignes de courbure sans intégration.

Envisageons pour cela comme directrice la spirale de POINCARÉ (N° 157)

$$r = \frac{1}{\eta - \epsilon}.$$

Je saisis auparavant cette occasion pour indiquer d'une manière générale ⁽¹⁾ comment l'introduction dans nos formules de l'inverse du rayon vecteur (qui nous a déjà permis de simplifier la question du cône circonscrit) peut procurer le même avantage dans les formules fondamentales (123) pour la recherche de l'équation d'une sphère équiradiale.

Si nous prenons l'équation (106) de la directrice sous la forme

$$\frac{1}{r} = f(\theta), \quad F = \frac{1}{f}, \quad F' = -\frac{f'}{f^2},$$

en introduisant en outre la quantité auxiliaire

$$v = \frac{\cos^2 \lambda}{R},$$

les formules (123) deviennent

$$\cos(\theta - \omega) = \frac{f}{2v}, \quad \sin(\theta - \omega) = -\frac{f'}{2v}.$$

En ajoutant les carrés, nous obtenons une relation indépendante de ω

$$f^2 + f'^2 = 4v^2,$$

et en divisant membre à membre, une formule indépendante

(1) Voy. N° 147, note 1.

de v , c'est-à-dire de R et λ .

$$\operatorname{tang}(\theta - \omega) = -\frac{l}{f}.$$

174. Ces égalités donnent pour la spirale de Ponsot

$$f = e^{\theta} + e^{-\theta}, \quad f' = e^{\theta} - e^{-\theta},$$

$$4v^2 = (e^{\theta} + e^{-\theta})^2 + (e^{\theta} - e^{-\theta})^2,$$

$$2v^2 = e^{2\theta} + e^{-2\theta},$$

$$e^{4\theta} - 2v^2e^{2\theta} + 1 = 0.$$

Résolvons cette équation, en laissant les doubles signes implicitement attachés aux racines, et décomposant les radicaux superposés en radicaux simples. Il vient ainsi :

$$e^{\theta} = \sqrt{v^2 + \sqrt{v^4 - 1}} = \sqrt{\frac{v^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{v^2 - 1}{2}},$$

d'où

$$e^{\theta} \sqrt{2} = \sqrt{v^2 + 1} + \sqrt{v^2 - 1},$$

$$e^{-\theta} \sqrt{2} = \sqrt{v^2 + 1} - \sqrt{v^2 - 1},$$

$$e^{\theta} + e^{-\theta} = \sqrt{2}(\sqrt{v^2 + 1}),$$

et par conséquent

$$\cos(\theta - \omega) = \frac{f}{2v} = \frac{\sqrt{v^2 + 1}}{\sqrt{2}v} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right)},$$

$$\theta - \omega = \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right)},$$

$$\sqrt{2}(v^2 + 1) = e^{\omega + \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right)}} + e^{\omega - \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right)}}.$$

Si donc on remplace dans cette formule v par sa valeur

$$\frac{1}{v} = \frac{R}{\cos^2 \lambda},$$

on aura l'équation de la spirale equiradiale entre R , ω , λ .

Si au contraire on substitue pour r l'expression

$$\frac{1}{r} = \frac{2C}{R} (C - \sqrt{C^2 - R^2}),$$

on obtiendra l'équation de la projection horizontale de la seconde famille de lignes de courbure de cette sphérale entre R , ω , C .

§ XXVII

Surfaces podaires

175. Proposons nous de trouver la surface podaire d'une sphérale absolument quelconque, par rapport au pôle. Ce choix spécial ne restreint pas d'ailleurs la généralité de la recherche pour un point arbitraire du plan de la directrice, puisqu'on peut toujours y rattacher comme pôle l'équation de cette courbe.

Envisageons à part le groupe spécial de plans tangents qui, le long d'une même caractéristique, sont communs à la surface, à la sphère variable, et au cône circonscrit. L'angle d'ouverture $2c$ de ce dernier nous est connu d'une manière générale (114). Si nous abaïssons du pôle une perpendiculaire sur chacun de ces plans, ces droites dessineront dans l'espace un nouveau cône de révolution, dont l'angle d'ouverture $\pi - 2c$ sera supplémentaire du celui du précédent, et l'axe parallèle à la tangente de la directrice en son point décrivant. Les intersections des génératrices de ce second cône avec les plans tangents perpendiculaires formeront une certaine ligne C , et le lieu de ces courbes, lorsque M parcourt la directrice, constituera la surface podaire cherchée. L'une des deux équations de cette ligne sera donc celle du cône supplémentaire en question. Nous pouvons aisément lui en adjoindre une seconde.

En effet la projetante OP du pôle O sur l'un des plans tangents du cône circonscrit, et la droite qui, dans ce plan, joint le pied P au sommet M_2 de ce cône, forment un angle droit inscrit sur la droite fixe OM_2 . Le point P appartient donc à la sphère qui aurait OM_2 pour diamètre; et par conséquent la courbe C toute entière se trouve sur cette sphère, dont l'équation formera la seconde relation cherchée.

Développons ces formules, en nous limitant, comme ci-dessus, aux directrices planes.

176. Le centre de la sphère se trouve au milieu du rayon vecteur $OM_2 = r_2$ (149) de la courbe lieu géométrique du sommet du cône circonscrit à la sphère. Elle a donc pour équation

$$\left(x - \frac{r_2}{2} \cos \theta_2\right)^2 + \left(y - \frac{r_2}{2} \sin \theta_2\right)^2 + z^2 = \left(\frac{r_2}{2}\right)^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - r_2(x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2) = 0,$$

$$R^2(1 + \tan^2 i) - r_2 R(\cos \omega \cos \theta_2 + \sin \omega \sin \theta_2) = 0,$$

$$(177) \quad \frac{R}{\cos^2 i} = r_2 \cos(\omega - \theta_2),$$

relation dans laquelle on remettra pour r_2 , θ_2 , leurs valeurs (149) (150) en fonction de θ .

177. Formons en second lieu l'équation du cône supplémentaire dont le sommet se trouve au pôle.

Son axe parallèle à la tangente de la directrice fait l'angle $\theta + a$ avec l'axe polaire. Il admet donc comme équation

$$y = x \tan(\theta + a).$$

L'angle générateur $c' = \frac{\pi}{2} - c$ de ce cône a pour sinus le cosinus de c (114)

$$\sin c' = \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{F^2 + F'^2}}.$$

Or $\sin c'$ exprime le rapport de deux distances: 1^o celle du point x, y, z du cône supplémentaire à son axe de révolution; 2^o celle $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ de ce même point au pôle. L'axe de figure ayant pour équations

$$x \sin(\theta + a) - y \cos(\theta + a) = 0, \quad z = 0,$$

la première de ces longueurs a comme expression

$$\sqrt{(x \sin(\theta + a) - y \cos(\theta + a))^2 + z^2}.$$

De là l'équation de ce cône

$$[x \sin(\theta + a) - y \cos(\theta + a)]^2 + z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \left(1 - \frac{\varphi^2}{F^2 + F'^2}\right).$$

ou en coordonnées mixtes

$$\begin{aligned}\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \sin^2 (\omega - \theta + a) &= \frac{F^2 + F'^2 - \varphi'^2}{F^2 + F'^2}, \\ \cos \lambda \cos (\omega - \theta + a) &= \frac{\varphi'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}, \\ (178) \quad \omega - \theta &= \arctan \frac{F}{F'} + \arccos \left(\frac{\varphi'}{\cos \lambda \sqrt{F^2 + F'^2}} \right).\end{aligned}$$

Telles sont (177) (178) les deux équations de la courbe podaire C. En éliminant entre elles le paramètre θ , on obtiendra celle de la surface podaire.

178. Le calcul se simplifie pour les sphérales vectorielles.

En premier lieu les formules (149) (150) qui expriment r_2 , θ_2 se réduisent à (151), (152) et donnent à l'équation (177) la forme

$$\frac{R}{\cos^2 \lambda} = \frac{F^2}{F'} \sin (\omega - \theta).$$

En même temps l'égalité (178) devient

$$\omega - \theta = \arctan \frac{F}{F'} + \arccos \left(\frac{F' \sin b}{\cos \lambda \sqrt{F^2 + F'^2}} \right).$$

179. Supposons enfin qu'il s'agisse du sphéro-nautilé, en considérant a comme constante. Ces dernières relations deviennent alors

$$\frac{R}{\cos^2 \lambda} = -e^{\Lambda \theta} \tan g a \sin (\omega - \theta),$$

$$\omega - \theta = a + \arccos \left(\frac{\cos a \sin b}{\cos \lambda} \right),$$

d'où en substituant la valeur de θ

$$\begin{aligned}\frac{R}{\cos^2 \lambda} &= -e^{\Lambda \left(a + \arccos \left(\frac{\cos a \sin b}{\cos \lambda} \right) \right)} \tan g a \sin \left[a + \arccos \left(\frac{\cos a \sin b}{\cos \lambda} \right) \right], \\ e^{\Lambda (\omega - a - \arccos \left(\frac{\cos a \sin b}{\cos \lambda} \right))} &= \frac{\cos a \sin b}{\cos \lambda}.\end{aligned}$$

Telle est la surface podaire du sphéro-nautille d'indice vectoriel quelconque b .

§ XXVIII

Surfaces antipodaires

180. On sait d'après le théorème de MAC-CULLAGH ⁽¹⁾, que si, d'une surface quelconque représentée par M sur la figure schématisque 27, on prend la transformée M_1 par rayons vecteurs réciproques, puis la podaire M_2 de M_1 , et enfin la transformée M_3 de M_2 par rayons vecteurs réciproques, la proposée M est elle-même la podaire de M_3 .

Imaginons que M soit une sphérale, que nous supposons vectorielle ⁽²⁾ et de directrice quelconque. En appliquant à son équation les formules générales de la transformation, nous obtiendrons celle de M_1 . D'après le théorème fondamental du N° 117, elle sera elle-même une sphérale vectorielle de même indice. La théorie précédente (§ XXVII) nous permet donc de connaître sa podaire M_2 . Puis les formules de la transformation réciproque en déduiront M_3 . Mais cette dernière surface M_3 est l'antipodaire de M . Nous possédons ainsi la marche qui nous permettra d'obtenir l'équation de l'antipodaire d'une sphérale vectorielle quelconque.

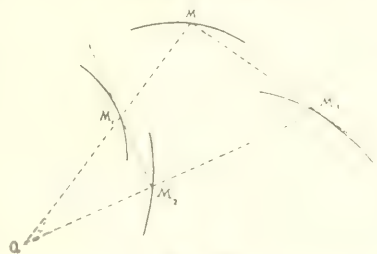


Fig. 27

181. Appliquons la au sphéro-nautille, dont nous avons l'équation générale (137, 138). Je la représenterai en abrégé par

$$(179) \quad f(R, \omega, \lambda) = 0.$$

(1) Dont M. HUMBERT m'a communiqué une nouvelle et très élégante démonstration, encore inédite.

(2) Il nous serait facile de formuler une méthode applicable à une loi quelconque z du rayon sphérique: mais je supprimerai ce développement, puis que la formule vectorielle nous suffit pour l'application au sphéro-nautille.

Supposons, pour fixer les idées, cette surface tournoyant dans le sens *sinistrorsum*.

Le rayon vecteur de l'espace

$$\rho = \frac{R}{\cos \lambda},$$

donne pour la transformation

$$(180) \quad k^2 = \rho \rho' = \frac{RR'}{\cos^2 \lambda},$$

car la latitude λ est la même pour les deux rayons, ainsi que la longitude ω . Il vient donc

$$R = \frac{k^2 \cos^2 \lambda}{R'},$$

et la transformée M_1 aura pour équation

$$f\left(\frac{k^2 \cos^2 \lambda}{R}, \omega, \lambda\right) = 0.$$

Nous savons (N° 116) qu'elle représente un sphéro-nautilé identique, mais procédant *dextrorsum*.

La surface podaire M_2 nous est connue d'après ce qui précède (N° 164). Représentons la en abrégé par

$$F(R', \omega, \lambda) = 0,$$

La transformée réciproque M_3 de celle-ci sera de son côté (180)

$$F\left(\frac{k^2 \cos^2 \lambda}{R}, \omega, \lambda\right) = 0,$$

et fera connaître l'antipodaire cherchée du sphéro-nautilé (179).

§ XXIX

Surfaces normopodaires

182. Au lieu d'abaisser du pôle, comme au § XXVII, des perpendiculaires sur les divers plans tangents d'une sphérale

quelconque, menons par ce point un plan perpendiculaire à chacune des normales de cette surface. Nous appellerons *normopodaire* le lieu géométrique de leurs intersections.

L'une quelconque de ces droites joint le point N (x, y, z) de la sphérale au point décrivant M ($r \cos \theta, r \sin \theta, \text{zéro}$) de la directrice. Elle a donc pour équations

$$(181) \quad \begin{aligned} X - r \cos \theta &= Y - r \sin \theta = Z \\ x - r \cos \theta &= y - r \sin \theta = z \end{aligned}$$

et le plan qu'on lui mène perpendiculairement par l'origine

$$(182) \quad (x - r \cos \theta) X + (y - r \sin \theta) Y + Zz = 0.$$

On déterminera les coordonnées X, Y, Z de l'intersection en fonction de x, y, z, θ , en adjoignant à ces trois égalités l'équation de la directrice ainsi que les formules (108), (109) qui représentent la sphérale. Il suffira dès lors, pour avoir l'équation de la normopodaire, d'effectuer l'élimination des cinq paramètres entre ces six relations.

183. Si l'on substitue dans la dernière (184) les valeurs de X, Y déduites des deux précédentes, il vient

$$(183) \quad \begin{aligned} [(x - r \cos \theta)^2 + (y - r \sin \theta)^2 + z^2] Z \\ + [(x - r \cos \theta) \cos \theta + (y - r \sin \theta) \sin \theta] rz = 0. \end{aligned}$$

Or l'équation (106) de la sphère variable réduit à φ^2 le coefficient de Z; et cette même relation développée sous la forme (107)

$$\varphi^2 - 2r [x \cos \theta + y \sin \theta] + r^2 = \varphi^2,$$

(en désignant par φ le rayon vecteur de l'espace) nous donne pour le coefficient de rz (183)

$$x \cos \theta + y \sin \theta - r = \frac{\varphi^2 - r^2 - \varphi^2}{2r}.$$

Il vient donc finalement

$$Z = z \frac{\varphi^2 - r^2 - \varphi^2}{2r}.$$

et par suite

$$(184) \quad \begin{aligned} X &= \frac{x(\varphi^2 + r^2 - \rho^2) + r(\varphi^2 - r^2 + \rho^2) \cos \theta}{2\varphi^2}, \\ Y &= \frac{y(\varphi^2 + r^2 - \rho^2) + r(\varphi^2 - r^2 + \rho^2) \sin \theta}{2\varphi^2}. \end{aligned}$$

184. Ces formules générales se simplifient lorsqu'il s'agit d'une sphérale équiradiale. Si l'on fait en effet $\varphi = r$, il reste seulement

$$(185) \quad \begin{aligned} X &= x \left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2} \right) + \frac{\rho^2}{2r} \cos \theta, \\ Y &= y \left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2} \right) + \frac{\rho^2}{2r} \sin \theta, \\ Z &= z \left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2} \right). \end{aligned}$$

Supposons l'équation de la directrice résolue sous la forme ordinaire, et rattachons y l'angle variable

$$\tan a = \frac{F}{F'}, \quad \sin a = \frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}}, \quad \cos a = \frac{F'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

Les équations de la sphérale deviennent de leur côté

$$(186) \quad \omega = \theta + a = \frac{\pi}{2},$$

$$(187) \quad R = 2F \sin a \cos^2 \lambda.$$

On en déduit identiquement

$$\rho^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \lambda} - 2RF \sin a,$$

$$x = R \cos \omega = R \sin (\theta + a), \quad y = R \sin \omega = R \cos (\theta + a),$$

d'où, en développant ces expressions trigonométriques

$$\begin{aligned} (187) \quad X &= R \left[\left(2 - \frac{R \sin a}{F} \right) \sin a \cos \theta + \left(1 - \frac{R \sin a}{F} \right) \cos a \sin \theta \right], \\ (188) \quad Y &= R \left[\left(2 - \frac{R \sin a}{F} \right) \sin a \sin \theta - \left(1 - \frac{R \sin a}{F} \right) \cos a \cos \theta \right], \\ Z &= R \tan \lambda \left(1 - \frac{R \sin a}{F} \right). \end{aligned}$$

185. La longitude ω se trouve par là définitivement classée de nos formules, et la question se réduit à l'élimination de R , λ , θ entre les quatre relations (187), (188).

Pour y procéder, convertissons les coordonnées rectangulaires X, Y, Z , du point quelconque de la normopodaire en coordonnées mixtes R', ω', λ' , que nous distinguons par les accents de celles du point X de la sphérale. Il vient ainsi après réductions

$$(189) \quad \begin{cases} R' \cos(\theta - \omega') - X \cos \theta + Y \sin \theta = \left(2 - \frac{R \sin a}{F} \right) R \sin a, \\ R' \sin(\theta - \omega') - X \sin \theta - Y \cos \theta = \left(1 - \frac{R \sin a}{F} \right) R \cos a, \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire

$$(190) \quad \begin{aligned} \frac{R'^2 \sin a}{F} - 2R + \frac{R \cos(\theta - \omega')}{\sin a} &= 0, \\ \frac{R'^2 \sin a}{F} - R + \frac{R' \sin(\theta - \omega')}{\cos a} &= 0. \end{aligned}$$

En retranchant membre à membre, nous obtenons cette valeur de R en fonction de θ et des nouvelles coordonnées

$$(191) \quad R = R' \left[\frac{\sin(\theta - \omega')}{\cos a} - \frac{\cos(\theta - \omega')}{\sin a} \right] = R' \frac{\cos(\theta + a - \omega')}{\sin a \cos a}.$$

Si d'autre part l'on divise membre à membre les égalités (189), il vient

$$\tan(\theta - \omega') = \cot a \cdot \frac{F - R \sin a}{2F - R \sin a},$$

c'est-à-dire une seconde relation entre R et θ , distincte de la précédente, puisque l'une renferme R' et l'autre F .

En éliminant R entre ces deux formules, nous formerons une *résolvante* définitive qui ne contiendra plus que θ , et pourra déterminer ce paramètre en fonction de R' , ω' . Il vient ainsi

$$F [\cos a - 2 \tan (\theta - \omega)] = R \frac{\cos (\theta - \omega' + a)}{\cos (\theta - \omega')},$$

et en substituant la valeur (191) de R

$$(192) \quad \begin{aligned} & R' \cos^2 (\theta + a - \omega') \\ & F \cos a [\cos (\theta - \omega') \cos a - 2 \sin (\theta - \omega') \sin a] \end{aligned}$$

186. Nous pouvons obtenir, en θ , une seconde résolvante de même nature.

Il vient en effet, d'après la valeur (188) de Z , qui n'a pas encore été employée

$$R' \tan \lambda' = R \tan \lambda \left(1 - \frac{R \sin a}{F} \right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{R^2 \sin a}{F} - R + R' \tan \lambda' \cot \lambda = 0.$$

d'où, en comparant à l'égalité (190)

$$(193) \quad \cot \lambda = \frac{\sin (\theta - \omega') \cot \lambda'}{\cos a}.$$

Nous aurons en conséquence d'après (187), (191)

$$\begin{aligned} \frac{R' \cos (\theta + a - \omega')}{\sin a \cos a} &= R = 2F \sin a \cos^2 \lambda = 2F \sin a \frac{\cot^2 \lambda}{1 + \cot^2 \lambda}, \\ \cot^2 \lambda &= \frac{R' \cos (\theta + a - \omega')}{2F \sin^2 a \cos a - R \cos (\theta + a - \omega')}. \end{aligned}$$

Si l'on substitue la valeur (193), on obtient définitivement

$$(194) \quad R' \cos (\theta + a - \omega') = \frac{2F \sin^2 a \cos a \sin^2 (\theta - \omega')}{\sin^2 (\theta - \omega') + \cos^2 a \tan^2 \lambda'}.$$

Telle est cette seconde résolvante en θ seul, distincte de la précédente, puisque'elle renferme λ' .

187. A ces deux résolvantes en θ , nous en pouvons adjoindre une troisième, qui n'en sera plus distincte, et ne pourrait que remplacer l'une d'elles : mais qui présentera ce caractère intéressant de ne plus renfermer la fonction F , dont la caractéristique aura ainsi disparu *en apparence*, puisque F a déjà cessé de jouer un rôle dans nos formules, mais qui, bien entendu, continue d'exercer *implicitement* son influence par l'intermédiaire de a . Il est donc bon de signaler cette relation, *immuable* dans sa forme, pour toutes les recherches de normopodaires de sphérales équiradiales quelconques.

Il vient à cet égard, en divisant membre à membre (192) et (194)

$$(195) \quad 2 \sin^2 a \sin^2 (\theta - \omega') \cos (\theta - \omega' + a) \\ = [\cos \theta - \omega' + a - \sin (\theta - \omega') \sin a \sin^2 (\theta - \omega') : \cos^2 a \tan^2 \lambda'] - 0.$$

La normopodaire se trouve donc finalement représentée, entre les coordonnées R' , ω' , λ' et le paramètre θ par les trois équations (192) (194) (195) qui se réduisent au fond à deux, entre lesquelles il suffirait d'éliminer θ , lorsque sera spécifiée l'expression F , qui définit la directrice dans chaque cas ⁽¹⁾.

188. Appliquons cette méthode au sphéro-nautille équiradial.

Le résultat se trouve très directement préparé, puisque nous n'avons qu'à considérer a comme une constante. La relation (195) ne renferme plus alors, dans ce cas spécial, θ que par l'angle $\theta - \omega'$. Si l'on développe les calculs, elle prend la forme :

$$\sin^6 (\theta - \omega') \\ + [\tan^2 \lambda' (1 + \cos 2a) (2 - \cos 2a) - \cos^2 2a] \sin^4 (\theta - \omega') \\ + [\tan^2 \lambda' (1 + 3 \sin^2 a) - 2 \cos 2a \tan^2 \lambda' \cos^2 a \sin^2 (\theta - \omega')] \\ - \tan^4 \lambda' \cos^4 a = 0,$$

équation du troisième degré par rapport à l'inconnue $\sin^2 (\theta - \omega')$.

(1) Il n'y a pas lieu de se poser le problème inverse des normopodaires, de même que le § XXIX résout celui des podaires, car il ne serait pas déterminé.

Représentons en abrégé par $f(k')$ la valeur de $\theta = \omega'$ que nous fourniraient les formules classiques de cette résolution, nous aurons

$$\theta = \omega' + f(k'),$$

et en remplaçant dans la formule (194) F par $e^{M\theta}$

$$R = f_1(k) e^{M f(k)}, e^{M\omega}.$$

On y reconnaît l'équation d'une surface nautiloïde dérivée de la même spirale logarithmique que la proposée. Son profil méridien se trouve représenté, dans le plan ZOX ($\omega' = 0$), entre les coordonnées polaires ρ et k , par l'équation

$$\rho = \frac{f_1(k) e^{M f(k)}}{\cos k}.$$

§ XXX

Surfaces céritoïdes

189. La notion des surfaces nautiloïdes peut sembler, à première vue, comporter une extension, sur la vraie portée de laquelle il ne sera pas inutile de préciser les idées. C'est encore le règne animal qui peut en suggérer la pensée. Les collections paléontologiques présentent en effet, à l'époque tertiaire, et en particulier pour l'étage éocène du calcaire grossier, de nombreux restes du genre cérîte (famille des cérîtides) dont le représentant le plus remarquable est le *cerithium giganteum*. C'est un fossile, en forme de cornet, qui montre, dans les grandes lignes de sa structure, les circonvolutions d'une cônehélice, avec amplification progressive de la section génératrice guidée par elle, analogue à celle des nautiloïdes.

On peut donc être porté à voir là une généralisation du mode de description de ces dernières surfaces. Cependant cette manière de voir ne constitue à proprement parler qu'une simple apparence. Il n'y a pas au fond, pour le géomètre, une famille de surfaces *cérîtoides* essentiellement distincte des nautiloïdes. Nous ne sortons pas en réalité de cette dernière classe.

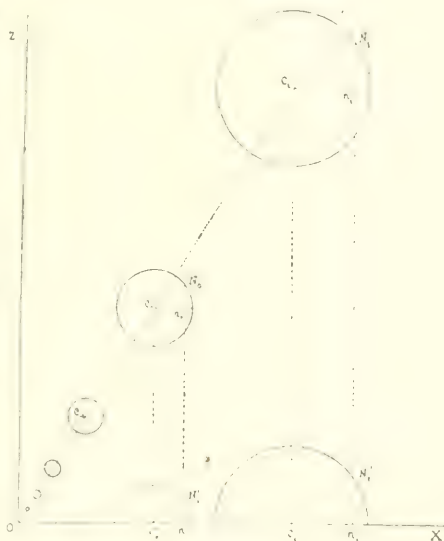
Ce n'est pas à dire cependant que cette considération doive être écartée sans examen, et sans retenir un instant l'attention. La conception et l'appellation des cérîtoides peuvent rendre certains services. Elles sont de nature (à coup sûr pour l'ar-

tiste, et même dans une certaine mesure pour le géomètre, à porter de premier jet plus de clarté dans l'esprit, que la fusion, un peu forcée, des deux classes de surfaces, qu'il nous faut commencer par expliquer.

190. Considérons (fig. 28) dans le plan du premier méridien ⁽¹⁾ le profil $C_0 n_0 N_0$, qui engendre un cœniloïde en se réduisant sur lui-même vers le pôle, ou s'amplifiant au contraire dans le sens opposé, autour de son centre de similitude C_0 qui décrit une cœnhélice, suivant la loi logarithmique envisagée jusqu'ici. Nous obtenons une série de positions de ce point \dots , C_{-2} , C_{-1} , C_0 , C_1 , C_2 , \dots , dans les révolutions successives du méridien mobile.

Rapprochons de cette surface le nautiloïde ordinaire qu'engendrerait, suivant le plan équatorial mené par le sommet O de la cœnhélice, une figure $C'_0 n'_0 N'_0$, identique à la précédente, et dont le centre de déformation homothétique C' décrit une spirale logarithmique de même loi amplificative.

Substituons maintenant à la génératrice $C'_0 n'_0 N'_0$ de ce nautiloïde auxiliaire la *génératrice composite* $C'_0 C_0 n_0 N_0$ formée d'un *piédestal* $C'_0 C_0$ surmonté de la figure $C_0 n_0 N_0$ identique à $C'_0 n'_0 N'_0$. Ce piédestal se dilatera pour son propre compte dans le même rapport que les dimensions verticales ou horizontales de l'une et l'autre figure, ou encore que le rayon vecteur OC'_0 de la spirale logarithmique. La surface engendrée par le *mouvement purement nautiloïde* du *profil composite à piédestal* $C'_0 C_0 n_0 N_0$ ne



(1) Il a été expliqué (N° 32) que la génération par une courbe quelconque, plane ou gauche, peut toujours, dans cet ordre de questions, être ramenée à l'emploi d'un profil-méridien.

différera en rien de celle que produit le mouvement *directement* *céritoïde* de la génératrice proposée $C_0 n_0 N_0$.

191. Nous pouvons donner à cet aperçu plus de précision, de manière à formuler l'équation générale des surfaces *céritoïdes*.

Considérons en effet, au bout d'une révolution complète, la section $C_0 n_0 N_0$ à son retour dans le premier méridien suivant $C_1 n_1 N_1$. Comparons les, en cet instant, avec la situation *céritoïde* $C_1 n_1 N_1$ de $C_0 n_0 N_0$.

L'ordonnée $N_1 n'_1$ d'un point du *céritoïde* se compose de $N_1 N'_1$ et de $N'_1 n'_1$. Cette dernière partie constitue l'ordonnée du *nautiloïde* proprement dit, à savoir (17)

$$N'_1 n'_1 = e^{2\Delta\pi} \cdot \Psi'(On'_1 \cdot e^{-2\Delta\pi}).$$

Quant au segment $N_1 N'_1 = C_1 C'_1$ il est égal à la hauteur initiale $h = C'_0 C_0$ du piédestal, amplifiée dans le même rapport

$$N_1 N'_1 = h \cdot e^{2\Delta\pi}.$$

Il vient donc pour l'ordonnée z du *céritoïde*

$$z = N_1 n'_1 = e^{2\Delta\pi} \left(h + \Psi'(R e^{-2\Delta\pi}) \right).$$

Le raisonnement que nous venons de faire pour une révolution entière, afin de mieux utiliser la figure tracée dans le premier méridien, convient évidemment à un angle quelconque de rotation ω . Nous aurons donc comme équation générale du *céritoïde*, en fonction de la hauteur h que possède le piédestal en traversant, pour $\omega = 0$, le premier méridien

$$z = e^{\Delta\omega} \left(h + \Psi'(R e^{-\Delta\omega}) \right).$$

On voit clairement dès lors, qu'il suffit, pour revenir à l'équation des *nautiloïdes* (17), de considérer comme un unique symbole fonctionnel $\Psi_1(\alpha)$ le binôme $h + \Psi(\alpha)$.

192. On pourrait éprouver quelque surprise, presque une déception, en voyant ainsi s'évanouir, quand on la serre de près, une généralisation qui semblait promettre un intérêt analogue à celui du passage des surfaces de révolution aux *hélicoïdes*, par l'adjonction au phénomène rotatif de cette même composante de translation suivant l'axe. Mais il est facile de faire ressortir la différence profonde qui sépare ces deux cas.

Dans les surfaces de révolution, toutes les trajectoires sont planes; aucune n'y possède la double courbure. Pour l'hélicoïde, toutes deviennent gauches. Dans les nautiloïdes, au contraire, les trajectoires sont déjà gauches. Ce sont des cônhélices. C'est à titre exceptionnel que les seuls points situés dans l'équateur y parcourent des spirales logarithmiques. Il est donc tout simple que l'adjonction de la composante de translation les dénature au fond beaucoup moins. Ce n'est plus alors qu'une simple question de degré. Cette introduction ne fait que modifier l'angle des cônhélices. C'est comme si les pas de toutes les hélices d'un hélicoïde augmentaient d'une même longueur; on ne sortirait pas par là de la catégorie des hélicoïdes.

Toutefois le point de vue céritoïde, ainsi réduit à sa juste valeur, ne semble pas devoir disparaître du langage des applications. On trouvera toujours plus claire la conception directe du mouvement d'un profil s'élevant en vrille autour d'un axe, que celle de l'adaptation factice à ce profil d'un piédestal pour imprimer à l'ensemble le mouvement nautiloïde plan. Sous cette réserve, cette considération du piédestal est bien cependant la voie à suivre dans chaque cas pour former l'équation de ces surfaces.

193. Je me contenterai à cet égard d'un seul exemple, auquel se rapporte précisément la figure 28, dans laquelle la génératrice est supposée circulaire.

Il suffira pour cela d'employer l'équation de la circonférence dont le centre occupe le sommet du piédestal h . Elle nous est fournie par le triangle OCN , supposé tracé dans un méridien de longitude ω

$$\overline{CN}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{ON} \cdot \overline{OC} \cos \text{NOC}.$$

L'angle NOC est l'excédent $\gamma - \lambda$, par rapport à la latitude λ du point N , de l'angle fixe γ que fait avec l'équateur OC ⁽¹⁾. En second lieu, ON représente le rayon vecteur de l'espace ^R $\cos \lambda$. On a encore

$$OC = \frac{OC'}{\cos \gamma} = \frac{e^{\lambda \omega}}{\cos \gamma}.$$

(1) Dans ces conditions, $\tan \gamma$ mesure la hauteur h du piédestal au moment où sa projection passe par le point I de la spirale logarithmique directrice.

Enfin CN est le rayon Br, ou Be^{Λ_0} de la circonférence génératrice.

Il vient d'après cela

$$B^2 e^{2\Lambda_0} = \frac{R^2}{\cos^2 \lambda} + \frac{e^{2\Lambda_0}}{\cos^2 \gamma_1} - 2 \frac{R}{\cos \lambda} \cdot \frac{e^{\Lambda_0}}{\cos \gamma_1} \cos(\lambda - \gamma_1),$$

ou en multipliant par $e^{-2\Lambda_0} \cos^2 \gamma_1$

$$\left(\frac{R e^{-\Lambda_0} \cos \gamma_1}{\cos \lambda} \right)^2 - 2 \left(\frac{R e^{-\Lambda_0} \cos \gamma_1}{\cos \lambda} \right) \cos(\lambda - \gamma_1) + 1 - B^2 \cos^2 \gamma_1 = 0,$$

et en résolvant :

$$\frac{B e^{-\Lambda_0} \cos \gamma_1}{\cos \lambda} = \cos(\lambda - \gamma_1) \pm \sqrt{\cos^2(\lambda - \gamma_1) + B^2 \cos^2 \gamma_1 - 1},$$

c'est-à-dire enfin

$$R = e^{\Lambda_0} \cdot \frac{\cos \lambda}{\cos \gamma_1} [\cos(\lambda - \gamma_1) \pm \sqrt{\sin^2 b \cos^2 \gamma_1 - \sin^2(\lambda - \gamma_1)}].$$

Telle est l'équation du céroïde à front méridien circulaire. On y retrouve, pour l'hypothèse $\gamma_1 = 0$, l'équation (6) du nauiloïde à front méridien circulaire.

194. La section droite serait déterminée par le plan normal à la cônehélice directrice. Elle se rapprochera d'autant plus d'une forme ronde, que ce plan sera lui-même plus voisin du méridien, c'est-à-dire γ_1 de zéro, et a de $\frac{\pi}{2}$; ou enfin que l'on emploiera des spirales et des cônehélices plus lentes.

Pour assurer définitivement à la surface ce que nous avons appelé (N° 101) le caractère des corps arrondis, il faudrait envisager le *sphéro-cérîte*, c'est-à-dire la sphérale vectorielle qui a pour directrice une cônehélice. Contentons nous d'en effectuer le calcul pour l'hypothèse équiradiale.

L'équation de la sphère variable

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha = e^{\Lambda\theta} \cos \theta, \quad \beta = e^{\Lambda\theta} \sin \theta, \quad \gamma = e^{\Lambda\theta} \operatorname{tang} \gamma_1,$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \rho^2 - 2e^{\Lambda\theta} (x \cos \theta - y \sin \theta - z \operatorname{tang} \gamma_1) &= 0, \\ \frac{\rho^2}{2R} - e^{\Lambda\theta} [\cos (\theta - \omega) \mp \operatorname{tang}^2 \gamma_1] &= 0. \end{aligned}$$

La dérivée de cette équation par rapport à θ nous donne

$$\Lambda e^{\Lambda\theta} [\cos (\theta - \omega) \mp \operatorname{tang}^2 \gamma_1] - e^{\Lambda\theta} \sin (\theta - \omega) = 0.$$

Mais on tire de la précédente

$$\cos (\theta - \omega) = \frac{\rho^2}{2R e^{\Lambda\theta}} - \operatorname{tang}^2 \gamma_1,$$

d'où en substituant ici

$$(196) \quad \sin (\theta - \omega) = \Lambda \frac{\rho^2}{2R e^{\Lambda\theta}}.$$

Il vient donc en ajoutant les carrés

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \left(\frac{\rho^2}{2R e^{\Lambda\theta}} \right)^2 - \left(\frac{\rho^2}{2R e^{\Lambda\theta}} - \operatorname{tang}^2 \gamma_1 \right)^2 &= 1, \\ \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\rho^2}{2R e^{\Lambda\theta}} \right)^2 - 2 \operatorname{tang}^2 \gamma_1 \left(\frac{\rho^2}{2R e^{\Lambda\theta}} \right) + \operatorname{tang}^4 \gamma_1 - 1 &= 0, \\ \frac{\rho^2}{2R e^{\Lambda\theta}} &= \sin^2 \alpha [\operatorname{tang}^2 \gamma_1 \pm \sqrt{\operatorname{tang}^4 \gamma_1 - \sin^2 \alpha (\operatorname{tang}^4 \gamma_1 - 1)}], \end{aligned}$$

et enfin

$$(197) \quad \frac{\rho^2}{2R e^{\Lambda\theta}} = C,$$

si nous représentons pour abréger par C la valeur constante

$$C = \sin \alpha (\sin \alpha \operatorname{tang}^2 \gamma_1 \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{tang}^4 \gamma_1}).$$

En substituant dans la relation (196), il nous vient

$$\sin (\theta - \omega) = \Lambda C, \quad \theta - \omega = \operatorname{arc} \sin \Lambda C,$$

et d'autre part (197)

$$\rho^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2C} \cdot \frac{\rho^2}{R} = \frac{1}{2C} \cdot \frac{R}{\cos^2 \lambda},$$

d'où en remettant cette valeur de θ

$$R = 2C \cos^2 \lambda \cdot e^{\Lambda(\omega + \arcsin AC)}.$$

Lorsque l'on suppose $\gamma_1 = 0$, la constante C se réduit à $\sin \alpha$; AC à $\cos \alpha$; $\arcsin AC$ à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Il vient dès lors simplement

$$R = 2 \sin \alpha \cos^2 \lambda \cdot e^{\Lambda\left(\omega + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)},$$

et l'on retrouve l'équation (146) du sphéro-nautilé équiradial.

195. Terminons cette longue étude par la propriété suivante.

La surface réciproque d'un sphéro-cirite vectoriel quelconque par rapport à son pôle est un sphéro-cirite égal, mais de sens interverti.

Appliquons en effet le théorème fondamental du N° 116. La réciproque de la conhélice directrice sera une conhélice symétrique, puisque ce mode de transformation conserve les angles. La nouvelle directrice, qui doit lui être semblable, sera donc une conhélice identique à celle-ci, mais déviée sur son cône. Quant au rapport vectoriel, on sait qu'il est conservé sans altération.

Plus généralement, enveloppons le plan d'une spirale logarithmique sur un cône quelconque, (et non plus de révolution), ayant son sommet au pôle de cette courbe. Traçons sur ce cône la transformée par rayons vecteurs réciproques de la ligne gauche ainsi obtenue, puis une ligne homothétique de celle-ci. Enfin développons la surface conique. Cette dernière courbe se transformera en une nouvelle spirale logarithmique égale à la première, mais de sens contraire. En effet l'enroulement, la transformation, l'homothétie, le déroulement constituent quatre opérations qui conservent les angles. Celui de la courbe avec son rayon vecteur doit donc rester constant.

Construisons maintenant, pour les deux lignes coniques comme directrices, avec un même module vectoriel, deux sphérales. Ces deux surfaces, d'après le théorème fondamental (N° 116) seront les transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques. La proposition précédente n'est donc plus qu'un cas particulier de celle-ci, relatif au cône de révolution.

SURVIVANCES DU RÉGIME COMMUNAUTAIRE EN PORTUGAL

(Abrégé d'une monographie inédite)

PAR

A. A. DA ROCHA PEIXOTO

Membre correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne,
Aide-Naturaliste à l'Académie Polytechnique de Porto,
Rédacteur en chef de la *Portugalia*

Il subsiste encore en Portugal, comme en d'autres pays européens, de nombreux vestiges du régime agraire communaliste. C'est principalement dans la *Serra* (la Montagne) — car, dans la *Ribeira* (la Plaine) il ne s'est perpétué que des résidus fractionnés et dilués — que la possession individuelle, exclusive et héréditaire du sol coexiste avec le domaine collectif d'une ou plusieurs zones territoriales, et, intermédiairement, avec les autres formes de transition évolutive depuis le régime pastoral jusqu'à la libre et pleine propriété.

Une grande partie des dizaines de milliers d'hectares de terre portugaise en friche est soumise à l'*administration légale* des «juntas» paroissiales. Mais en fait, tout ce qui se rapporte soit à la jouissance, soit au mode de tirer parti des terres incultes est soumis à la délibération, non des «juntas» ni d'autres pouvoirs hiérarchiques, mais bien aux suffrages des assemblées de tous les intéressés. Les terres en friches ne produisent guère que des pâturages, des bruyères et des bois à brûler, ceux-là mis à profit indistinctement par tous les habitants de l'endroit possesseurs de bétail, et les produits forestiers répartis proportionnellement entre tous les feux. Il arrive donc que, si des raisons de convenance collective le conseillent, l'assemblée des

voisins décide la prohibition du droit de pâturage, des émondes et tailles sur certaines surfaces déterminées, lesquelles, sous ce régime éphémère, sont appelées, dans le *Barroso*, «*coutados*». Sans égard ni observance des formules établies, certaines étendues de terres incultes ont été vendues, et le produit destiné à des dépenses d'intérêt commun, par exemple la réparation de l'église principale ou d'une chapelle, la construction d'un lavoir, la restauration d'un moulin ou d'un four banal, l'exploitation des eaux pour les fontaines publiques, l'établissement d'un cimetière. Cependant la désamortisation en masse des biens communaux n'a pas été tentée et ne le sera pas, par suite de l'impossibilité où sont les peuples de renoncer à des droits traditionnellement communautaires et intrinsèquement dictés par des circonstances orographiques, climatiques et économiques. Ce n'est que temporairement que l'on tolère ou que l'on permet, à des habitants indigents ou dont la moisson est insuffisante, la culture accidentelle ou transitoire de petits lots des terres en friches collectives, qui sont alors labourés, puis *queimados* (brûlés) et ensuite semés en seigle, la récolte de cette céréale retournant ultérieurement au régime commun. Du reste, la collectivité y trouve profit, puisque non seulement la production céréalière s'accroît, mais les terrains ainsi mis en valeur fournissent ensuite de meilleurs prés et des bruyères plus abondantes.

Ces notions générales données, il convient maintenant de spécifier, sans entrer pourtant dans de trop grands détails, (que n'admettraient pas les limites de cette brève étude) quelques aspects de ce régime de communauté survivant, lequel réside principalement dans la possession collective du terroir, dans la répartition équitable du bien commun et dans les formes selon lesquelles il est mis à profit ou cultivé.

A Pitões, déjà sur la lisière du plateau de Barroso et en face du massif du Gerez, les terres de propriété individuelle sont insuffisantes pour la production céréalière nécessaire. Il faut donc approprier, des terres en friches, la superficie complémentaire. A cette fin la population se réunit en novembre, discutant et convenant quel terrain il faut choisir pour les *cavadas* (labours), attendu que, tous les ans, et par suite de la faible fertilité régionale, la rotation des cultures s'impose de rigueur. Après le choix du local par l'assemblée, le peuple procède à la démarcation des glèbes qui reviendront à chacun, et l'on commence la distribution des lots par l'habitant de l'une des extrémités du village. Toutefois, on procède d'abord au choix de la *cavada* de l'église, c'est-à-dire, du terrain qui lui sera destiné,

et il convient que tous, et jusqu'au bout, travaillent dans cette part dont le produit intégral est destiné *para Deus* (à Dieu). Ceci rappelle la coutume hellénique, puis romaine, de la division de la terre en lots pour la fondation d'une cité, la distribution ne se faisant qu'après que l'on avait mis à part les lots attribués aux divinités. (DAREMBERG & SAGLIO).

Le labour effectué, et comme on n'a rien à craindre du bétail jusqu'en mai, la zone n'a pas besoin de garde. Mais quand survient la *ferranha*, c'est-à-dire quand les graminées fructifient, nouvelle réunion du peuple afin d'ouïr les propositions ayant trait à la garde des défrichements. Pour empêcher les animaux de détruire les cultures, on adjuge la surveillance à celui qui s'offre moyennant le plus petit nombre de boisseaux du produit, lequel est responsable, jusqu'au temps de la moisson, des préjudices occasionnés par les bestiaux.

La moisson se réalise selon le bon plaisir de chacun, mais pourtant à des jours assez rapprochés.

Néanmoins le charroi ou *carreja*, c'est-à-dire le transport de la récolte à domicile, est marqué pour tous et en un jour fixé par tous. Pour la raison suivante: avant le charroi, il faut vérifier le produit, ce dont se chargent le gardien et deux voisins; tout le monde a donc, dans son lot, disposé le seigle en *pousadas*, chacune d'elles présentant cinq gerbes de récolte: et comme le nombre de boisseaux pour lequel a été adjugée la garde doit être proportionnellement réparti, il convient de vérifier, équitablement, ce que chacun a effectivement retiré. DE JUBAINVILLE parle d'une analogie lointaine tirée d'un texte archaïque, rapportant que les vaccaei, peuple celtibère établi dans le bassin du Douro et occupant une partie de l'ancien royaume de Léon, partageaient tous les ans la terre arable, et distribuaient malgré tout, en parts égales et après la moisson, le produit effectif de la récolte.

Comme l'ancien germain dont parle Tacite, l'homme ne possède pas la terre: il n'a la propriété que de ce qu'elle donne. (FUSTEL DE COULANGES.)

Sur le versant «transmontain» du Marão certaines localités réunies en *chamados*, qui sont les assemblées locales, délibèrent sur les lots à diviser dans la terre en friche sur lesquels on ira chercher, pour la saison, le genêt indispensable au fumier. On discute d'abord: le terrain est maigre en genêts; ceux-ci sont encore trop jeunes. Mais une fois fixée la zone choisie par la majorité, on marque le jour de l'*affazer* (travail). Quant à la division, dans certains endroits elle se fait en proportion des biens du cultivateur, car celui qui possède le plus a le plus

besoin de fumier pour ses champs; dans d'autres, les lots sont répartis également.

Au jour marqué tous les hommes du village vont à la montagne, où s'effectue, au cordeau, le mesurage du polygone choisi. Une fois la superficie délimitée, soit, par exemple, un rectangle, sur l'un des côtés se placent, avec leurs hoes, les représentants des ménages; du côté opposé un autre homme, considéré et expérimenté, vérifie si les habitants sont bien placés; il les fait s'éloigner ou se rapprocher, s'il est nécessaire, pour que la distribution soit juste. Jusqu'au moment où, la jugeant exacte, il crie à haute voix: *Bem está!* (C'est bien) — et tous, comme un seul homme, donnent un coup de houe en terre. En grand cela ressemble à une ligne pointillée; et chaque «point» marque l'extrémité des lots. Le tirage au sort, qui suit, se fait en écrivant tous les noms sur des bulletins qu'un enfant tire successivement. Au premier nom revient le premier lot et ainsi de suite, tous et chacun respectant ce que le sort a décidé.

Pareillement, dans certaines communes belges des Ardennes, le terroir collectif est divisé annuellement en autant de parcelles qu'il y a de ménages. Une fois tirées au sort, chacun alors nettoie, *brûle*, fume et sème. En certaines localités le *maire*, avec des arpenteurs jurés, apporte le cordeau, le *reb* germain, qui est destiné aussi à effectuer les démarcations. (LAVELEYE).

Ces assemblées populaires et locales, qui tombent rapidement en désuétude, et surtout aux basses altitudes, impriment au début tout leur caractère aux vestiges de mode de vie communaliste. Dans le vaste pays plat de St. Vincent (*Chã de S. Vicente*), dans la Serra das Alturas, et les autres localités des «Terres de Barrosos», les *coutos*, ou réunions des agrégats communaux, ont lieu, d'ordinaire, dans la maison du four banal, sur une place, sur le parvis, près de la croix et, en général, après la messe. A l'avance, et en règle générale, deux ou trois hommes préviennent les habitants, sous la détermination préalable du *regedor*⁽¹⁾, annonçant de nouveau, le jour même, à son de trompe ou de corne, l'approche de l'assemblée. C'est alors que se résolvent les réformes et réparations, et encore, en partie, que se rend la justice, soit sur des plaintes au sujet de terrains communs indûment absorbés par autrui, soit au sujet de l'irruption du bétail dans le domaine privé des réclamants.

(1) Autorité de la commune qui correspond, à peu près, au maire.

Deux arbitres, nommés aussitôt, enquêtent et, dans le dernier cas, signalent le préjudice, fixant l'indemnité. Et celle-ci est payée sans réserves, vu que, à son tour, le délinquant pourra aussi *réclamer justice*.

Si la population désire unanimement une amélioration d'intérêt général, l'assemblée décide, établissant les charges compatibles. Le hameau de Villarinho avait son siège paroissial à Negrões et il désirait vivement une chapelle qui lui eût évité la course dominicale. On décida l'édification, et certains habitants eurent à s'acquitter, en proportion de leurs moyens, du transport des matériaux de construction; d'autres durent s'acquitter, toujours équitablement, de la fourniture des chaumes pour le toit; l'argent nécessaire au paiement des maçons fut *réparti* parmi les autres; et finalement chacun nourrissait et logeait les artisans, à la journée, sans qu'on perdît de vue, bien entendu, les capacités individuelles de l'hôte. Enfin et pour tant de messes annuelles, tant d'habitants auraient à payer un nombre égal de boisseaux, la charge passant à d'autres l'année suivante, puis à d'autres, et ainsi de suite, *andando à roda* (à tour de rôle).

Dans les localités des bords des Serras da Nogueira, de Bornes et à Montesinho, les *conselhos* (assemblées) sont déterminés par les *regedores*, sollicités au préalable par les *homens do accordo* (les notables); les sessions sont annoncées à son de cloche à l'église, à la prison, ou à son de crécelle. Les voisins des hameaux étant réunis, ils prennent connaissance de l'époque des contributions, de la vaccine projetée et nécessaire des bestiaux, des réparations à faire aux chemins et aux fontaines; on frappait d'une amende les propriétaires des animaux qui causaient des dégâts dans les *coutados* (terrains défendus) et l'on notait les absents sans motif valable pour leur imposer une amende au bénéfice de ceux qui étaient présents et travaillaient. L'habitant chargé des avis jouissait de privilèges compensateurs: il n'apportait pas son aide aux réparations, il ne pouvait être chargé des arrestations, il ne fournissait pas le logement aux troupes...

Les *conselhos* de la Terra de Miranda, qui se tenaient aussi après la messe conventuelle, décidaient non seulement des réparations et des *coutarias*, des près et des bois, mais également de la culture des biens des saints. Certains, effectivement, possèdent des prairies et d'autres terres: Notre Dame du Naso est propriétaire à Povoia; le Saint-Sacrement est propriétaire à Villa Chã; les Ames du purgatoire, ici et à Palaçoulo. Les frais de culture de ces terres sont communales; et si le saint ne pos-

sède rien, on choisit alors, dans le terrain en friche, quelques *belgas* (glèbes) pour la moisson, comme à Cercio, destinées à Notre Seigneur J.-C. Tout le monde travaille avec ardeur, pour le culte et pour la fête.

Les mêmes motifs, la répartition des eaux, les semailles, les réparations à l'église, la substitution du taureau local forcent aux *ajuntos* du Minho, assemblées pareilles annoncées préalablement, à Soajo, à Parada do Monte et à Cidadelhe au son de la *carrapita* (buccin, le *Triton nodiferus*, Lamk.). C'est encore avec cette trompe que l'on notifie les réunions aux gens de Germil et de l'Ermida, de la Serra da Amarella; le *regedor* et ses auxiliaires y assistent, et pour harmoniser les intéressés dans la liquidation des litiges, se trouvent les six notables les plus respectés, qui sont les *homens do accordo*. Ceux qui manquent payent une amende, opportunément applicable en messes à St. Roch, pour que ce dernier protège le *vivo*, c'est-à-dire le bétail, ou à d'autres dépenses collectives nécessaires. Même un juge nommé tout exprès recueille l'argent, auquel s'ajoute le produit du charbon fabriqué par la commune. Et indépendamment des assemblées régulières, d'autres extraordinaires réunissent, par aventure, les voisins: les incendies, relativement fréquents dans la montagne, provoquent toujours une réunion à une heure avancée de la nuit: tout le monde marche pour les dominer, pour la préservation des *rouços* (bruyères), des ruchers et des bestiaux.

A Lindoso les réunions sont encore nombreuses, les débats opiniâtres, les sessions lentes et parfois prorogées. Au son de la *corua*, qui est le buccin appelé aussi dans d'autres endroits le *carrapito*, les habitants sont prévenus. De chaque ménage assiste une personne sous peine, en cas d'absence non légitime, de la traditionnelle amende; mais si le sujet à discuter est capitale la famille tout entière se présente. Les semailles des seigles et des maïs, la garde des raisins par échelle et la vendange générale sont, comme les autres affaires déjà connues, des motifs de considérations et de décisions communautaires. Cependant l'un des plus importants est le congrès où l'on fixe les deux jours de la fauchaison. Le délai est court car les lots ou *cabeceiros* étant petits et, à l'intérieur du terrain, unis les uns aux autres, si on isolait les moissons, les récoltes des *pães* (céréales) limitrophes seraient foulées et gâtées.

Les opinions sont divisées: les uns jugent que la récolte n'est pas mûre à point; les autres, par précaution, ont cueilli dans le champ plusieurs épis, sur la maturation des quels ils fondent leur assertion. Le débat se poursuit, les groupes se sépa-

rent, mais la majorité l'emporte, les récalcitrants finissant par tomber d'accord. Le laps de temps fixé, on fauche, jusqu'à midi de la 1^{ère} journée, le seigle; le soir, on laboure et on met à terre le maïs; le lendemain le labour continue; et enfin on transporte les seigles dans les granges. Pour que tout le monde se rende au travail, et à la même heure, la corne sonne; si quelqu'un commence plus tôt, il doit payer une amende et une forte amende; pour terminer le travail autre son de corne; et si quelqu'un se retarde, nouvelle amende.

Depuis des temps lointains et imprécis ce sont des règlements qui, dans les diverses localités du Gerez, statuent sur les pâturages et, accessoirement, établissent encore les lois sur les autres aspects du communisme silvicole et agraire. Quelques uns de ces diplômes, fort intéressants, ayant des siècles d'anticipation sur des institutions toutes nouvelles qui, en partie et sans le savoir, tentent de se rapprocher d'eux, ont été publiés intégralement depuis peu dans le seconde tome de la *Portugalia* (Porto, 1907), et se rapportent à Villarinho da Furna, Covide, Rio Caldo et Villar da Veiga. Mais comme l'occasion n'est pas propre à des commentaires détaillés, il suffit de noter que les *concelhos* municipaux ont transformé une partie de ces conventions en ordonnances municipales, de même que les *homens do accordo*, ou les *seis da fala* sont devenus, en général, le *regedor* et d'autres personnes parmi les plus pondérées et les plus expérimentées. L'adaptation aux circonstances actuelles, avec les sophismes obligés, est rappelée par notre paganisme populaire avec les apparences chrétiennes.

Les réunions se font; à S. João do Campo, par exemple, avec une parfaite régularité; une personne de chaque maison y assiste; les femmes qui, n'ayant pas de mari, possèdent *fazenda*, c'est-à-dire du bétail, y participent; on met à l'amende les absents, la peine étant aggravée en cas de récidive; on discute les réparations, les moissons, le battage sur *a eira commum* (l'aire banale) et principalement le pâturage à l'intérieur du périmètre alpestre; et en dernière instance les *homens do accordo* décident. Dans les assemblées on impose les amendes à ceux qui ne montent pas dans la montagne à leur tour, à ceux qui conduisent le troupeau général dans des endroits non désignés, à ceux qui indûment auraient défriché des bois. S'il survenaient des divergences on consultait les *escripturas* (règlements) anciennes — et réellement, en général, elles prévoyaient tout: et si un abus était d'importance le *juiz* (juge) ou président interrogeait sur la pratique du délit, l'accusé s'avancait en se découvrant et en expliquant les faits, les *homens do accordo* délibéraient et indi-

quaient au juge s'il devait ou condamner, ou absoudre. Si le produit des amendes, des aumônes et des offrandes se trouvait insuffisant pour les solennités et les réparations, on convoquait une assemblée pour que tout le monde allât faire du charbon, afin d'obtenir, par la vente à la *Ribeira*, l'argent qui manquait.

La résistance d'une telle solidarité, le Gouvernement Portugais l'a rencontrée quand le Gerez, il y a vints ans, est entré dans le régime forestier. C'est à Villar da Veiga que commença la réaction, s'étendant à S. João do Campo, Covide et Rio Caldo; tous marchent et on démolit les ponts et travaux publics, afin de démontrer de cette manière la traditionnelle possession inaliénable et imprescriptible de ce que l'on voulait leur usurper. De nuit divers émissaires parcouraient les paroisses, surveillant les étables pour voir si on les avait détruites ou altérées. Le peuple de Furna ayant même décidé, dans une convocation, que, en guise de protestation, personne ne travaillerait dans les forêts de l'État, un des habitants rompit le pacte et tous rouèrent de coups le malheureux! Tous: pour que l'on ne pût mettre sur personne une responsabilité individuelle (TUPE DE SOUZA, in *Portugalia*).

C'est l'État qui céda. En garantissant la liberté des pâturages et des bois, l'antiquité juridique d'un droit original se trouvait implicitement reconnue.

Il serait très facile de rapprocher beaucoup de cas similaires, en les cherchant dans les Asturies, le Léon, la Catalogne et l'Andalousie (ALTAMIRA, COSTA, LEZON, etc.). En diverses localités de l'Italie également, où subsistent les assemblées et le même régime, les biens des communes sont gérés par des conseils identiques, *Consiglio di vicini*, et l'harmonie des intérêts des familles avec ceux de la communauté est parfaite. (LAVELEYE). Dans les Pyrénées, pour ne rappeler qu'un cas en France, c'est dans les assemblées populaires que se discutent et se résolvent toutes les affaires locales et même, avec équité, que se répartissent les impôts. (TAINE).

Le développement de cet aperçu, inexécutable dans les limites imposées à cet écrit, sera réalisé opportunément avec de nombreux détails comparatifs et inédits. Mais pour une meilleure connaissance élémentaire des restes d'un régime social archaïque, il convient de faire encore allusion à certains aspects supplémentaires et dérivés. L'un deux, certainement, est celui qui concerne les *veziras*, c'est-à-dire les réunions du bétail local que l'on mène paître sous la garde d'un montagnard. A Campo do Gerez, comme dans toutes les autres localités de la montagne, les bêtes à cornes paissent sur la montagne de mai à la

St. Michel; c'est ce que déterminent les *escripturas* consuetudinaires. Cependant il y a l'*Pajunto*; et pour commencer, le pasteur va chaque jour sur la hauteur. Dans les premiers temps les vaches vont à Leonte; à la St. Jean elles changent pour le Telheirão; à la fauchaison elles descendent au village, puis retournent au Prado. Les vaches de Villarinho da Furna, pour ne plus donner qu'un exemple, vont en troupeau à Abegoaria, près de Portela do Homem; à la St. Jean elles sont détachées pour le Vidoal, à Amarella, et aussi pour Chão da Fonte; puis elles descendent à Ramisquedo et, vers le mois de septembre, retournent encore à Abegoaria. La fin du pâturage et le *fresco* (fraîcheur) du temps expliquaient les mutations. (Voir aussi ALBERTO SAMPAIO, in *Portugalia*, t. I).

A Covide — pour montrer combien l'échelle de garde est équitable — celui qui a deux vaches prend son tour une fois par ronde et se repose l'autre; celui qui en a quatre, prend son tour dans chaque ronde; celui qui en a six est de garde deux jours dans une ronde et un jour dans la suivante; celui qui a huit vaches, est de garde deux jours à chaque ronde, etc. Le pâtre, avant de recevoir les vaches, les compte toutes; si l'une d'elles manque, c'est son prédécesseur qui la cherche. Ce dernier donne à souper à son remplaçant, comme l'ordonne la *escriptura*.

Les gens de Lindoso, qui parfois laissent les vaches paître sans berger, quand ils décident de former la *vezeira* commencent le tour de garde par l'habitant d'*uma ponta* (de l'un des bouts) du village. Sur les hauteurs il y a des *curros* fixes, *paúlos* ou *terrões*, c'est-à-dire des terrains clos où l'on enferme le bétail, et une hutte où le pasteur dort et fait sa cuisine. La hutte est ronde et pointue, le lit est de fougère et de bruyère, et les étables, dont il y a plusieurs, ainsi que les *cercados* (enclos), appartiennent aux gens *avezeirados* (associés).

Pour les troupeaux du plateau *barrosão* chaque propriétaire passe autant de jours sur la montagne qu'il possède de paires de vaches. La dernière nuit il passe la garde à son successeur mais reste avec lui, ne se retirant que le matin. Ils procèdent tous deux au comptage des têtes: si quelqu'une manque durant la nuit qu'ils passent réunis, ils la payent tous deux; si c'est le jour, quand le pâtre est seul, c'est lui qui la paye; si c'est le loup qui la mange sans que le pâtre l'ait vu, il paye également; s'il l'a vu, il ne paye rien et autres règles qu'il serait oiseux de préciser maintenant. Également à Tourém, autre localité *barrosã* mais frontière, le troupeau est gardé par tous, chacun devant autant de jours de garde qu'il possède de

paires de bêtes. La garde commence par un habitant de l'extrémité de la paroisse, et ce dernier, au retour, passe le tour à son voisin.

Ce régime pastoral s'applique aux veaux, aux chèvres, aux *chibarras* ou *reichêlos* (boucs), aux brebis et aux *marranchos* (pores). Selon les zones, cependant, le pourcentage de têtes qui détermine les jours d'occupation de chacun varie. Ainsi, à Campo do Gêrez, pour chaque dix brebis, dix chèvres ou dix boucs, c'est un jour de garde; et déjà à Covide, un peu plus bas, la même période se détermine pour qui a 20 têtes de chèvres. A Córthinas de Brufe et à Cutêllo, à Amarella, le troupeau de chèvres est de quarante et de vingt par journée de garde; et à Soajo chaque montagnard ne prend son tour qu'une fois, qu'il ait peu ou beaucoup de bétail.

Dans la Serra do Extremo le régime est mixte: il existe la *vezia* (réunion du bétail local) pour le *vivo* du mont, chèvres et moutons, les bêtes se réunissant au son matinal du buccin; chaque propriétaire est de garde pendant un nombre de jours proportionnel à la quantité de têtes qu'il possède. Mais il arrive aussi que certains laboureurs font paître leur bétail sous la garde de leurs valets.

A Cabreira montent les troupeaux de chèvres de St. Vicente de Campos et de Zebral, à raison de vingt et dix par journée respectivement. Celui de Zebral est si vaste que parfois il *couvre le soleil*; et par suite le tour se prend non par homme mais par maison, de sorte que trois et quatre personnes de la famille suivent les bêtes. Sur les mêmes monts, mais non si haut, se dirigent également les troupeaux de brebis de Ruivães.

Cette garde des troupeaux diverge clairement de ce qui se pratique pour les vaches. Les chèvres ou brebis montent le matin, après l'appel à son de trompe ou par la voix du pâtre qui passe pour inviter à *deitar a fazenda* (lacher le bétail). Avec son bissac, *sacola*, *talêga* ou *surrão* où il emporte sa nourriture pour la journée et le bâton ou la houlette, le pâtre marche derrière le bétail, réuni d'abord à l'une des extrémités du village. Toutes les bêtes se distinguent par des marques sur les oreilles, les cornes ou les cuisses. Elles paissent pendant le jour, les chèvres plus haut que les bêtes à laine. Et à la brune elles retournent aux parcs sans qu'il soit besoin que les conducteurs du troupeau leur désignent les bergeries. Les chèvres regardent vaguement avec curiosité et avec douceur; mais leurs physionomies, tristes et résignées, sont intelligentes (TAINE).

Une apparente divergence égalise pourtant plus encore le régime montagnard des pâturages. A Alhões, dans la Serra de

Montemuro, les bêtes sont toujours *em vigia* (sous garde), sauf s'il y a de la neige ou du mauvais temps. Celui qui a vingt bêtes va une journée tous les dix jours; et celui qui en possède vingt-quatre va une journée tous les cinq jours; s'il est indigent, n'en comptant à peine que six, son tour arrive tous les dix-huit jours; et l'espace est de trente-six, si le misérable n'en a que trois. Toutes les bêtes sont divisées en groupes ou *vizeiros*; l'on en compte neuf dans la localité. L'inventaire se fait deux fois par an: à la tonte et à la St. Michel; et pour la surveillance et la division équitable, il y a même des procès-verbaux.

Déjà le bétail de la Gralheira n'a pas de surveillance. Chacun s'occupe de son bétail sur une partie du terrain en friches. Mais une autre portion importante est louée par le peuple, pendant deux mois, aux pasteurs venus du côté de l'Estrella et environs, de Nellas et de Casal Sancho, de Santa Comba et de Canas de Senhorim. C'est la transhumance, derniers et éternels vestiges de l'Age reculé de la Terre vague — puisque «au début la terre n'était à personne» (OLIVEIRA MARTINS). Cependant les pasteurs paient à la paroisse une somme stipulée d'avance, bien que le plus grand avantage pour le montagnard soit encore la fumure que les ovidés transhumants laissent sur le local.

Dans l'Extremo également tous ceux qui possèdent des juments se forment en une association qui entretient l'étalon; celui-ci est logé et nourri, chez chaque sociétaire, un nombre de jours proportionnel aux biens de l'hôte en bêtes chevalines.

Enfin, un régime similaire appliqué aux pores tend à prendre fin dans le Traz-os-Montes. A peine dans quelques localités subsiste l'usage d'envoyer quotidiennement dans certains champs les troupeaux de pores locaux, mais conduits par un *porquero* (porcher) mercenaire, aussi appelé, comme un vestige de l'antique usance, le *vizeireiro*.

Pour les chèvres et les pores à l'engrais telles sont encore les coutumes en vigueur dans certaines régions des Appennins (LAVELEYE). Et dans la montagne française, le même régime et les mêmes époques marquent l'état d'identiques collectivités pastorales (BAUDRILLART).

Or, les vaches constituant la principale richesse mobilière des hauteurs, — en bouvillons, en lait, en travail et en partie des engrais — le montagnard ne manquerait pas de prendre d'efficaces mesures, et dans le même esprit communiste, sur un certain élément essentiel pour la production des bêtes d'élevage. Il y a donc le taureau ou les deux *tauroux du peuple*. Dans une réunion, la vente de celui qui existait étant résolue,

on décide l'acquisition du remplaçant, que l'on obtient par une imposition qui retombe sur tout le monde, mais dans la proportion des vaches que possède chaque habitant de la montagne. Dans les villages des *concelhos* de Montalegre et de Boticas, presque en totalité *barrosôs*, il existe, fréquemment déjà, une étable, une prairie — *lamas do touro* — et un grenier à foin. Chacun fournit le foin, ayant en vue, pour la quantité à fournir, le nombre de têtes possédées. Et ou bien les hommes de la commune, à tour de rôle, vont chaque jour faire prendre l'air au taureau, ou bien quelqu'un se charge de le mener paître dans son pré particulier, en échange des engrais ou d'autres privilèges. Néanmoins, il existe des localités où il n'y a point d'étable pour le taureau du peuple. Il est donc hébergé dans l'étable de chaque ménage autant de jours que l'on y compte de paires de vaches.

A Covide et dans la Carvalheira, qui est encore dans le cercle du Gérez, on suit pour les taureaux le même régime *barrosão*; et à Campo, de mai à septembre, il va à la montagne, avec les vaches, passant en hiver dans la ferme de chaque voisin autant de jours que le logeur possède de bêtes à cornes. Ce dernier lui fournit à déjeuner, l'envoie ensuite avec quelqu'un de la maison passer la journée dans une *bouça do povo* (friche du peuple) et le soir lui donne le souper. Mais à Cutêllo chaque montagnard l'entretient une année. Se l'animal meurt ou s'il faut le vendre, comme le produit ne serait pas suffisant, on impose le peuple en proportionnant la contribution à ses biens en bêtes à cornes.

La coutume va se perdant et en maintes localités on ne s'occupe déjà plus du taureau reproducteur, comme à Castro Laboreiro et à Miranda do Douro. Dans cette dernière commune il a même existé autrefois, comme en d'autres villages transmontains, le *berrão* (le verrat) du peuple. Aujourd'hui, ou c'est un propriétaire qui prête le taureau ou l'on paye en nature ou en argent la saillie. Et c'est ainsi avec les temps que tombera dans l'oubli cet admirable concert des populations pour l'acquisition de cet indispensable coopérateur de leur fortune, tirant de la terre elle-même presque épuisée les moyens de réaliser le dit achat: à Germil, c'était souvent avec le *charbon du peuple* que le nouveau taureau entraît dans la localité.

Ce charbon de la commune, au quel parfois il a été fait allusion, pourvoit à bien des déboursés: solennités religieuses, cure pour l'église, travaux locaux, tributs. Quand l'un quelconque de ces besoins publics l'exige, on convoque une assemblée et l'on distribue les terrains à *brûler*, à Amarella, trois par trois,

et l'on stipule que chacun devra présenter au *juiz* (président de confrérie) de l'église, par exemple, un panier de combustible. Le peuple se rend alors à la *coutada* (bois) et effectue la *queimada* (incendie) ou *estórçada*, de sorte à obtenir une denrée de vente ou d'échange qui, en règle générale, suffit à couvrir le besoin urgent. Du reste, et dans la terre vague non prohibée, chacun peut fabriquer du charbon pour son propre compte, le vendre pour sa gouverne, ou, comme cela se passe parmi diverses populations de Castro Laboreiro, aller l'échanger en Galice, et même en Portugal, par d'autres denrées. Pour soi-même le montagnard n'a pas besoin de bois transformé : les bois sont distribués en nature et proportionnellement après une réunion qui, à Tourém, est convoquée à son de cloche et s'effectue sous le branchage d'un châtaignier. Puis on répartit avec équité le genêt sauvage, la bruyère et le chêne.

La permanente et impérieuse nécessité des irrigations, ou pour les récoltes de mai à fin août, ou pour les pâturages, détermine, outre d'ingénieuses machines d'hydraulique agricole populaire, dont on parlera opportunément, le même esprit-communiste pour la division des eaux de jouissance commune. Tous les habitants les utilisent et font leurs dérivations des sources et fontaines situées sur la hauteur, dérivant tumultueusement par les ravins et les sillons. Mais, lorsqu'approche l'époque de l'irrigation forcée, la convocation a lieu et alors dans l'assemblée on résout les désobstructions, les captations, les *guias* (directions), les déviations nécessaires, le temps d'irrigation étant réglé par heures, demi-journées et journées proportionnellement aux besoins de chacun. Le régime des *poçadas* ⁽¹⁾ ou *poças*, dans le Gerez, est encore en vigueur selon les préceptes des ancêtres, fidèlement respectés et suivis. Et parallèlement apparaissent, encore comme des vestiges manifestes, les *poças* de groupes d'héritiers, l'irrigation de *torna e torna* ⁽²⁾, etc.

Avec le régime hydrographique se trouve naturellement liée la mouture. Montesinho possède, par exemple, deux moulins du peuple. N'importe qui mout dans l'un d'eux, lequel en hiver est, manifestement, suffisant pour tout le monde. En été une combinaison, jamais méprisée, règle les intérêts individuels. Cependant, dans d'autres localités les moulins appartiennent à des groupes d'héritiers. A S. João do Campo celui qui existe

(1) Sources que l'on empêche de couler au moyen d'un petit mur.

(2) Eau publique avec laquelle arrose celui qui arrive le premier, et dès qu'il se retire, un autre la détourne dans son champ.

appartient à dix-huit; néanmoins, dans la transition, le régime communal est encore partiellement en vigueur; l'on procède dans le groupe à l'*encaminhar das aguas* (acheminement des eaux), au *picar das mós* (repiquer les meules) et à d'autres réparations comme on effectuerait les labours dans la communauté primitive. On tire au sort pour le tour. Et comme dans ce cas encore les temps sont égaux, la régularisation du service se limite à l'ordre des successeurs.

Logiquement, au moulin commun est lié le *four du peuple*, si fréquent encore sur le plateau *barrosão*. Comme il appartient à tous, ses améliorations et ses réparations sont proportionnées aux biens des participants, selon l'unité fondamentale et régulatrice de la vache — comme dans les communautés agraires primitives, germaniques, italo-grecques et autres (LAVELEYE).

Dans ce four, celui qui cuit en premier lieu c'est le plus aisé, puisque, comme il y a une plus grande consommation de bois, c'est à lui que doit revenir la charge la plus lourde.

On l'appelle, pour cette raison, le *quentadeiro* ⁽¹⁾. Celui-ci passe le tour à un autre et ne recommence à utiliser le four qu'après que tout le monde a eu son tour ou *corra a roda*. Les édifices et leurs annexes intérieurs, qui seront décrits ailleurs, réunissent les conditions expérimentées pour faire parfaitement face aux besoins, et sont en même temps les auberges que la bienfaisance des communes offre généreusement aux voyageurs. Fréquemment, les marchands et les mendiants vont s'y loger pendant quelques jours — et parfois même les investigateurs ethnographiques!... — les populations fournissant, avec la générosité qui s'est tarie dans la *Ribeira*, toutes les ressources possibles pour faire dans les locaux des séjours prolongés!

Dans ses relations économique-individuelles le montagnard adopte d'ordinaire un régime qui dispense, dans la plupart des cas, de la circulation du numéraire, d'ailleurs toujours rare sur les hauteurs. En échange de réparations non rémunérées en argent, un charpentier *barrosão*, par exemple, obtient la voiture et les vaches d'autrui pour aller chercher son bois et ses foin. A Canadello, dans le Marão, et dans un cas parallèle, la réciprocité des services de l'artisan s'appelle la *paga da retada*: c'est aussi la cession de la voiture pour le transport du genêt, de la Serra da Meia Via, par exemple. De même encore, payer la *retada* dans la même zone, ce sera le prêt de la voiture pour

(1) C'est celui qui, le four étant refroidi, devra en conséquence brûler plus de bois pour chauffer.

conduire le fumier dans un enclos ou le labourage d'une glèbe en échange de l'aide prêtée à une corvée. La mutualité se montre encore dans une très grande variété de cas, qu'il n'est pas nécessaire pour le moment d'enregistrer: la permission, pour une femme, de ramasser les châtaignes dans la zone combinée d'une châtaigneraie en échange de quelques écheveaux qu'elle devra filer, ou pour un homme, qui prend l'engagement, en retour, de céder un boisseau de sel, sont des aperçus qui donnent une idée des pactes.

Pour les emprunts, la forme la plus habituelle est, naturellement, le commodat. S'il y a disette de pain, de lait, ou de vin, on en cherche chez celui qui possède ces denrées en abondance, en payant le commodataire, ou à la moisson, ou après l'achat, selon la quantité initiale et en espèce égale. Même, dans le Marão, si une paire de bœufs ne s'adapte pas bien au joug, il est plus facile que dans la *Ribeira* d'obtenir le troc avec un autre animal de la localité qui s'attelle mieux; ou si un habitant a du bétail petit et plus de terres labourables qu'un autre, ce dernier cède son bétail plus gros, moyennant remise de quelque argent.

Ainsi, manifestement, devraient coexister les formes primitives du commerce. C'est ce que l'on constate à Castro Laboreiro, par exemple. Le *castrejo* (habitant de Castro), dans la terre inculte commune, fabrique le charbon, qu'il vend ensuite à S. Gregorio ou à Melgaço. Avec l'argent obtenu, ici même, à Penso ou à Vallinha, il achète du sel qu'ensuite, sur la terre portugaise ou en Galice, il troque contre du maïs. Ou alors, toujours à Melgaço ou aux Arcos, il acquiert, avec le produit du combustible, de la vaisselle blanche vernissée qu'il transporte aussitôt, sur sa tête ou à *cavallarias* (à cheval), dans les villages de Galice. Là bas on fait généralement le négoce suivant: on remplit le vase de maïs, que l'on vide ensuite, le galicien garde chez lui le récipient et le montagnard emporte le contenu.

De cet aperçu, qu'il faut terminer, se tire la facile conclusion des infiltrations transformatrices qui, lentement et doucement, réduisirent à l'extrême nécessaire tout le régime collectif passé. Il subsistera seulement, en vertu de déterminantes mésologiques immuables, le condominium de certains près à fourrage et de terres en friche et encore, par aventure, le *compascuo* toléré — comme de nos jours déjà dans les terrains privés, mais ouverts et en friches, il se tolère par respect pour la tradition et la vieille coutume. L'accroissement de la population a été, partout, le principal véhicule propulseur; les familles augmen-

tant, la part de chacune est insuffisante, et alors le produit de la terre ne fait équilibre qu'avec la culture intensive et les améliorations pour lesquelles il est besoin du stimulant de la possession permanente. D'un autre côté les progrès de la culture de la vigne et de l'olivier favorisent le développement de la propriété privée (LAVELEYE); et le réseau des voies et autres facilités de communications et de transports modifient, jusqu'où il est possible, un régime archaïque dans lequel le bien de tous ne poussait pas à des altérations spontanées d'occupation.

Enfin, les adoptions et les adaptations de coutumes de la *Ribeira*, comme on l'a vu, concourent à la transition et l'accélèrent. «La plaine est maîtresse du siècle et fait la guerre à la montagne.» (MICHELET).

On a même observé, dans le cas du moulin du Gerez, entre autres, comme se circonscrivent déjà les possessions; c'est encore ce qui se passe à Covide, pour les aires de divers *quinhoeiros* et desquelles quelques voisins seuls usent par faveur; à S. João do Campo, l'*Aire grande*, pour le seigle, appartient à seize personnes, les *canastros* (dépôts d'épis), pour le magasinage du grain, sont à divers, avec ou sans *recto* (espace libre à l'entour), ou seulement avec entrée et sortie, et d'autres même sont divisées en *quartelas*, soit partagées en deux ou trois. Mais dans le Soajo, dans l'une quelconque des aires, celle de Alto, celle de Barrosa, celle de Ateiral et celle de Penedo, qui est la plus grande, et sur le grand plateau d'une dalle, tous peuvent battre au fléau, mais seul celui qui y a droit possède les *espigueiros* (dépôts d'épis). Sous peu, il arrivera de même à Grassão, non loin de Ponte da Barca, dans les friches environnantes du quel divers voisins disposent leurs *canastros*.

C'est là, du reste, le procédé astucieux de la conquête, espèce d'usucapion. Dans toute terre vague, qui le peut et veut démarquer un terrain plus ou moins grand, qu'il entoure ensuite d'un mur. Si on ne le renverse pas, la possession vient avec le temps, les enfants en héritent et opportunément sur la matrice cadastrale elle se trouve enregistrée. Cette ambition donne à merveille origine à d'in vraisemblables adaptations de mauvais terrains à la culture. L'habitant du Soajo, donc, dès qu'il peut avoir l'engrais et l'eau, pousse la tentative presque sur les pentes escarpées, *cacheando* (creusant) la terre rocailleuse, le granit presque, qu'il désagrège et pulvérise!

Un autre exemple de la dénaturation du régime communal vient de plus loin. Dans l'épisode *beirão* (province da Beira) déjà rapporté, dans lequel les populations de Montemuro et de la Gralheira louent les terrains en friche pour les paturages des

troupeaux de moutons des environs de l'Estrella, ces terrains furent, réellement, répartis dans les temps passés. Ceux d'Alhões se partagèrent entre les douze habitants d'alors; de sorte qu'aujourd'hui le produit de la vente est encore divisé entre douze *cabeceis* (représentants des 12 originaux) et ultérieurement distribué proportionnellement aux nombreux ménages qui depuis lors se sont dédoublés. C'est ce qui se passe également dans la Gralheira; il en est de même dans le Minho, pour n'indiquer qu'un seul cas, des eaux de Ruivães; et il arrive que souvent certains ont de l'eau, beaucoup d'eau, et pas un seul champ à irriguer!

Pour finir, parmi les initiatives qui émergent d'un régime social écroulé, quelques unes dominent par la fortune et la hardiesse, rappelant, grossières et minuscules, les audaces de la fraude, de l'usurpation, de la violence et de l'abus avec lesquels la noblesse féodale annihilait l'autonomie des communes. Cela revêt naturellement divers aspects. Martins da Peneda, par exemple, dans la Serra du même nom, brave et riche, fut le suzerain de cette zone alpestre. Muletier, charbonnier, possédant quelque terre labourable et une force électorale inspirant le respect, il domine sur les populations de la Gavieira, permettant ou interdisant transports et travaux, prohibant les transports à qui bon lui semble, par le seul refus de la cession des fourrages aux bestiaux, élevant ou abaissant les prix des denrées, se faisant servir gratuitement, s'il veut, et, indiscutablement, toujours respecté et obéi. En échange, le chef de la tribu affranchit d'être soldat, obtient irrégulièrement des réductions d'impôts et protège devant les tribunaux...

De cette manière va finissant un régime qui garantissait à tous une portion du sol équitablement partagé, le pain et la viande, le vêtement et l'abri. Il lui succède, dans le mirage d'une fortune aléatoire et dans la fiction de l'indépendance, l'inégalité des conditions, la domination du plus fort, et, avec des illusions et des apparences, la réalité de la servitude. «Pays pauvre, pays libre!» (TAINE).

Porto, le 30 mars 1908.

L'ALGÈBRE DE PEDRO NUÑEZ

PAR

H. BOSMANS S. J.

L'Algèbre de Nuñez est aujourd'hui fort peu connue, pour ne pas dire tout à fait oubliée. Elle eut cependant son heure de célébrité et elle l'eut à bon droit. Simon Stévin, Adrien Romain, Guillaume Gosselin, par exemple, juges compétents s'il en fût, en parlent en termes élogieux.

D'où vient alors l'inattention des historiens des mathématiques?

Il est à cela une raison; l'extrême rareté de l'ouvrage. Il n'en est pas d'autre, car l'Algèbre de Nuñez est à tout point point de vue remarquable.

Quant à cette rareté elle-même, n'aurait-elle pas pour cause les circonstances complexes dans lesquelles Pedro Nuñez édita le *Libro de Algebra*.

Portugais de naissance, l'auteur écrit une première rédaction dans l'idiome national. Trente ans plus tard il la développe et la traduit en espagnol, langue plus parlée, dit-il lui-même, que la langue maternelle. Il met enfin le volume au jour bien loin au delà des frontières de la patrie, à Anvers, aux Pays-Bas!

Anvers était alors, je le veux bien, le foyer des arts et des sciences. On devine l'intention de Nuñez. S'il prend cette voie détournée pour éditer son Algèbre, il espère lui assurer ainsi un succès plus grand, une plus large notoriété. L'effet fut malheureusement tout opposé. Très remarqué par les princes de la science, — je viens de nommer Stévin, Romain, Gosselin, — le *Libro de Algebra* semble être resté confiné dans leur cercle,

sans jamais se répandre dans celui d'un public nombreux. A Anvers on aimait peu l'Espagne.

Autre contre-temps: les immortelles découvertes de Viète. Elles concentrent bientôt toute l'attention, éclipsent les meilleures algèbres de la seconde moitié du xvi^e siècle, font oublier les excellents manuels de Butéon de Peletier, de Gosselin, de Petri. L'Algèbre de Nuñez partagea la mauvaise fortune générale.

Il y a là pour l'historien une injustice à réparer.

Feu Wertheim de Francfort, le premier, a mis la main à l'œuvre. Dans une étude très documentée, très bien faite, il a réhabilité la *Logistica* de Butéon⁽¹⁾. Après lui, j'ai essayé des travaux analogues sur l'*Algèbre* de Jacques Peletier du Mans⁽²⁾, le *De Arte Magna* de Guillaume Gosselin⁽³⁾, la *Practicke om te leeren Cijpheren* de Nicolas Petri de Deventer⁽⁴⁾.

Au tour de Pedro Nuñez!

(1) *Die Logistike des Johannes Buteo* von G. Wertheim. Bibliotheca Mathematica. 3^e ser. t. 2. Leipzig 1901. pp. 213-219.

La «Logistique» n'eut qu'une seule édition, dont voici le titre:

Ioan. Buteonis Logistica quae et Arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta. Lygdvni, Apud Gvlielmvm Rovillium, Svb Scvto Veneto. M.D.LIX. Cum Privilegio Regis.

(2) *L'Algèbre de Jacques Peletier du Mans*. Revue des Questions Scientifiques. T. 61, Bruxelles, 1907, pp. 117-173.

L'Algèbre de Peletier parut en français sous le titre de:

L'Algebre De Iaques Peletier du Mans, departie an deus (sic) Liures. A Tres illustre Seigneur Charles de Cossé Marechal de France. A Lion Par Ian De Tournes. M.D.LVIII. Avec Priuilege de la Court.

L'édition originale est imprimée conformément aux règles de la réforme de l'orthographe proposée par l'auteur. Je n'en ai pas tenu compte dans mes citations.

L'Algèbre de Peletier a été rééditée plusieurs fois en français. Elle eut aussi une traduction latine: *Iacobi Peletarii Cenomani, De Occulta Parte Numerorum Quam Algebram vocant, Libri duo*. Parisiis, Apud Gulielmum Cauellat... 1560.

(3) Le «*De Arte Magna*» de Guillaume Gosselin. Bibliotheca Mathematica. 3^e ser. t. 7. Leipzig, 1906-1907, pp. 44-66.

Gvlielmi Gosselini Cadomensis Bellocassii De Arte Magna, seu de occulta parte numerorum, quae et Algebra et Almucabala vulgo dicitur, Libri Quattor. . . . Parisiis. Apud Aegidium Beys, via Iacobaea, ad Insigne Lili albi. M.D.LXXVII.

Le *De occulta parte numerorum* de Gosselin n'eut qu'une édition.

(4) *La Practijcke om te leeren Cijpheren* de Nicolas Petri de Deventer. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, t. 39, Bruxelles, 1908, pp. 272-303.

L'ouvrage de Petri parut en flamand sous le titre de:

Practijcke Om te Leeren Rekenen cijpheren ende Boeckhouwen / met die Regel Coss j en Geometrie seer propijcklijcken voor allen Compuyden. Deur

Dans un premier article⁽¹⁾, je me suis contenté de signaler quelques passages où Nuñez fait preuve d'un talent très personnel et se distingue nettement de ses contemporains. Mais le *Libro de Algebra* mérite mieux. Je voudrais en donner une analyse complète, analyse faite un peu à la manière des comptes-rendus d'ouvrages modernes, analogue en un mot à celles des *Algèbres* de Butéon, Peletier etc. nommées ci-dessus.

Pour des parties entières du *Libro de Algebra*, une simple transcription des titres des chapitres en donnera une idée suffisante. Ce sont celles où l'auteur n'a rien de neuf et répète ce que l'on trouve alors dans tous les traités similaires. Pour d'autres, j'y ajoute en outre les énoncés des problèmes. Ils paraissent au premier abord naïfs et simples. Ne les jugeons pas avec nos idées du ^{xx}e siècle. En remettant Nuñez dans son cadre, ils deviennent bien instructifs. L'historien des mathématiques s'y arrêtera avec plaisir, car ils lui permettront d'apprécier, par lui-même, à quel point Nuñez était au niveau de la science.

Avant d'entrer en matière, voici d'abord le titre complet de l'ouvrage :

LIBRO // DE ALGEBRA // EN ARITHMETICA // Y
GEOMETRIA. // Compuesto por el Doctor Pedro Nu-//ñez,
Cosmographo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico
Iubi-//lado en la Cathedra de Mathe-//maticas en la Vniuersi-
dad // de Coymbra. // (Marque d'imprimeur de Steelsius :
Un autel, sur lequel un sceptre s'élève entre deux colom-
bes. En exergue la devise :) Concordia res parvae crescunt.
// EN ANVERS. // En casa de la Biuda y herederos // de
Iuan Stelsio. // 1567. // CON PRIVILEGIO REAL. // ⁽²⁾.

Nicolaum Petri Dauentriensem. — A la dernière page : Ghedruckt tot Amstelredam by Cornelis Claesz. wonende opt water int Schrijfboeck. Anno 1583.

L'ouvrage a eu de nombreuses rééditions, mais n'a jamais été traduit.

⁽¹⁾ Sur le «*Libro de Algebra*» de Pedro Nuñez. *Bibliotheca Mathematica*. 3^e sér., t. 8, Leipzig. 1907-1908, pp. 154-169.

Dans ce travail je développe plusieurs sujets, dont je me contente de donner ici les conclusions. Le lecteur y trouvera notamment des renseignements complémentaires sur la bibliographie du *Libro de Algebra*.

⁽²⁾ In 8^o de 32 pp. non numérotées, au ^re seul de 1 à 341 et 3 pp. blanches.

L'exemplaire dont je me sers appartient à l'Université de Louvain (Côté «Sciences, 293»). Je remercie vivement M.M. les Bibliothécaires de l'Université, et tout particulièrement M. Wils, pour l'obligeance avec laquelle ils ont bien voulu le remettre à ma disposition à Bruxelles, en vue de ce nouveau travail.

Des exemplaires ont comme adresse d'imprimeur: «En Anvers. En casa de los herederos de Arnolfo Birckman. 1567.» Il ne faudrait pas croire pour cela à l'existence d'une deuxième édition. Seul le titre diffère. Au surplus, en mettant ainsi leurs adresses respectives en tête d'une même édition, les éditeurs ne font que se conformer à un usage alors courant au Pays-Bas.

On voudra bien remarquer enfin l'orthographe du nom de l'auteur. Dans l'ouvrage actuel il signe Pedro Nuñez. J'ai cru devoir la conserver.

I

Le *Libro de Algebra* semble divisé en trois parties. En réalité il en a cinq, car la deuxième est subdivisée en trois autres indépendantes entre elles. Cependant pour la clarté je m'en tiendrai au numérotage de l'auteur.

Dès la première partie Nuñez donne la résolution des équations des deux premiers degrés à une inconnue. Cette partie ne paraît pas ici à sa place. L'explication du calcul algébrique se trouve dans la seconde partie seulement; puis la troisième partie a de nouveau le même objet que la première: la théorie des équations. Il y a là, à la fois une répétition et une scission, dont on n'aperçoit pas bien la raison d'être.

La première partie contient six chapitres.

Cap. 1. Qual sea el fin de la Algebra; y de sus conjugaciones y reglas. Définition de l'Algèbre: énoncé de la résolution des équations des deux premiers degrés à une inconnue.

L'algèbre, dit Nuñez, a pour but de déterminer les inconnues par la résolution des équations. «En esta arte de algebra el fin que se pretende, es manifestar la cantidad ignota. El medio de que usamos para alcançar este fin, es ygualdad.» (1).

Trois termes interviennent dans l'équation complète du second degré. Au xvi^e siècle ils portent assez habituellement en latin les noms de *numerus*, *cosa* et *census*. Nuñez traduit: *numero*, *cosa*, *censo*. Il imite en cela les traductions analogues usitées alors dans toutes les langues de l'Europe. Nicolas Petri de Deventer disait: *ghetal*, *coss*, *zensus*; et Jacques Peletier du Mans: *nombres absolus*, *cossiques* et *censiques*. L'inconnue c'était la chose que l'on cherchait. «Les italiens, dit Peletier (2), l'ont

(1) F^o 1. r.^o

(2) L'*Algèbre*, p. 4. — Peletier était en relations avec Nuñez. Lui-même

appelée la *cosa*, lequel mot à passé jusques aux nations étrangères; tant que Stiffel les nombres appartenant à l'algèbre a appelés *nombres cossiques*, et m'a semblé bon les appeler ainsi avecques luy.» La seconde puissance, dit encore Peletier ⁽¹⁾ «est le quarré, lequel avec ceux qui ont traité les racines nous appellerons *nombre censique*, de ce mot *cens*, comme si un nombre quarré fut le cens ou revenu de ce nombre multiplié par soy-mesmes.»

Cap. 2. Practica de las reglas. Application à quelques exemples des règles énoncées dans le chapitre précédent.

Cap. 3. Demonstracion de las reglas de las conjugaciones simples. Par «conjugaciones simples», il faut entendre les équations à deux termes des formes

$$x^2 = ax; \quad x^2 = a; \quad ax = b.$$

Cap. 4. Demonstracion de las reglas de las conjugaciones compuestas. Il s'agit de l'établissement des formules de résolution de l'équation complète du 2^e degré. Comme tous les algébristes du temps, Nuñez traite séparément les trois formes

$$x^2 = ax + b; \quad x^2 + ax = b; \quad x^2 + b = ax$$

dans lesquels a et b sont positifs. Les démonstrations s'appuient sur les éléments d'Euclide et sont purement géométriques.

L'auteur reconnaît l'existence des deux racines de l'équation de la troisième forme, mais de la troisième forme seulement. Au xvi^e siècle, c'est là l'opinion commune des géomètres. L'utilité des quantités négatives commençait bien, il est vrai, à être soupçonnée par quelques esprits supérieurs. Luc Paciolo notamment y revient à plusieurs reprises. Mais ses explications manquent de netteté et de rigueur. Rien d'étonnant, car c'est au xix^e siècle que la théorie des quantités négatives a été faite d'une manière vraiment complète et irréprochable. Quant à

il a publié une de ses lettres à l'algébriste portugais (*J. Peletarii. In Euclidis Elementa Geometrica demonstrationum libri sex...* Lygdvni. Apvd Ioan. Tomaesium, et Gvl. Gazeivm. m.d.lvii. En Appendice ff.^o (p₃) v.^o — (p₆) r.^o. Il dit aussi au chap. 1, de son Algèbre (p. 2). «J'ay encores oü dire de Pierre None, Mathematicien de Lisbonne en Portugal, qu'il l'auoit aussi traitée (l'algèbre) en son langage Espagnol; mais ie n'ay veu son Liure». Cette phrase est écrite en 1554. Le *Libro de Algebra* aurait-il circulé en manuscrit?

(1) *L'Algèbre*, p. 6.

Núñez il s'élève contre l'emploi des quantités négatives, chaque fois qu'il les rencontre. «Elles sont une absurdité, dit-il, une pure contradiction» (1).

Ne jugeons pas l'auteur avec nos idées actuelles. Il pèche par l'exagération de sa qualité maitresse: la logique et le souci d'une correction minutieuse dans les démonstrations. Mais il est bien excusable. L'utilité des quantités négatives, loin de s'imposer déjà avec évidence était encore très problématique; la légitimité surtout de leur emploi, à peine entrevu, était mal démontrée.

Cap. 5. Que hecha la ygualacion se deve todo de reduzir a un censo. Examen du cas où le terme en x^2 est affecté d'un coefficient. Avant d'appliquer les règles données au chapitre 4, divisez tous les termes de l'équation par le coefficient du terme en x^2 .

Cap. 6. Como conosceremos si el caso es imposible o necessario a toda cantidad. Nous dirions: impossibilité et indétermination. Chapitre très original, très curieux. Voici quelques unes des réflexions de l'auteur.

Proposons-nous de partager 10 en deux parties, dont le produit soit 96.

L'équation de Núñez est (2)

$$x(10 - x) = 26 \quad \text{d'où} \quad x = 5 \pm \sqrt{25 - 26}.$$

La soustraction à effectuer sous le radical est impossible. Donc le problème l'est également.

Mais il peut y avoir impossibilité sans que celle-ci se manifeste dans l'équation. Ainsi soit à partager 12 en deux parties telles que le tiers de la première plus le quart de la seconde fasse 4 (3). L'équation du problème est

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}(12 - x) = 12, \quad \text{d'où} \quad x = 12.$$

La racine trouvée vérifie l'équation. Il y a néanmoins impossibilité car 12 n'est pas une partie de 12. Tout ceci est d'une exactitude bien rare alors, digne de nos bons manuels modernes des premiers éléments d'algèbre.

(1) F.º 224 r.º — Voir aussi f.º 126 v.º etc.

(2) Ff.º 21 v.º-22 r.º

(3) F.º 21 v.º

Voici où Nuñez devient moins heureux. Soit à résoudre⁽¹⁾

$$5x^2 = 9x^2.$$

Il y a impossibilité. Pour lui il y a toujours impossibilité quand $x=0$; c'est là un obstacle contre lequel il se butera dans tout le cours de son algèbre. Logique mal entendue! La solution $x=0$, ne correspond jamais exactement au problème tel qu'il se le pose. Quant à l'idée d'en généraliser un peu l'énoncé, s'il l'a eue, ce qui est probable, elle lui répugne et il ne s'y arrête pas.

Terminons ce sujet par une solution très remarquable. Cherchons un nombre qui, multiplié par 3, vaille son carré; et tel que le nombre, augmenté de ce carré, fasse 7⁽²⁾.

Il me faut passer cette fois par les calculs intermédiaires de l'auteur. On a, dit-il

$$3x = x^2 \quad \text{d'où} \quad x + 3x =$$

c'est-à-dire

$$4x = 7. \quad (1)$$

D'autre part, or a aussi

$$x + x^2 = 7. \quad (2)$$

Additionnant (1) et (2), il vient

$$5x + x^2 = 14 \quad (3)$$

d'où $x=2$. Solution qui vérifie la dernière équation sans convenir au problème. Pourquoi? La réponse, remarquons-le, est de Nuñez. Cela provient de ce que la racine de (3) n'est racine ni de (1), ni de (2). Tout naïf soit-il, voilà bien l'un des plus anciens exemples où il soit question de l'équivalence des équations. A ce titre il mérite d'être signalé.

(1) F.º 21 r.º

(2) Ff.º 22 v.º-23 r.º

II

La première subdivision de la deuxième partie a pour objet le calcul algébrique. Cette subdivision, avons-nous dit, eût dû logiquement précéder la première partie, et en la plaçant ici, peut-être Nuñez a-t-il un peu manqué de méthode. N'exagérons pas cependant cette critique. Il faut tenir compte du peu d'avancement de la science. Il faut tenir compte aussi de l'indépendance d'esprit de l'auteur et de sa tendance à s'écarter des voies battues. Dans son algèbre, non seulement il ne s'en tient pas à l'ordre traditionnel, mais contrairement aux habitudes de son temps, il distingue nettement l'algèbre de l'arithmétique et suppose les opérations de celle-ci déjà démontrées ailleurs. Aussi bien, s'il y a chez Nuñez défaut de méthode; il n'y a rien de plus. L'ordre adopté n'est pas le plus naturel; les démonstrations restent néanmoins toujours rigoureuses.

Cette observation faite, voici les titres des chapitres:

Cap. 1. De la denominacion de las dignidades. Les «dignidades» sont les termes contenant l'inconnue. Il s'agit des noms portés par leurs divers degrés. Nous avons déjà indiqué ci-dessus les noms des deux premiers; nous donnerons tantôt celui des autres.

Cap. 2. Sumar las dignidades enteras. Addition des polynômes rationnels et entiers en x .

Cap. 3. Diminuir las dignidades. Soustraction des mêmes polynômes.

Cap. 4. Multiplicar las dignidades.

Cap. 5. Partir las dignidades.

Cap. 6. Los quebrados de segunda intencion, como se deven de reducir a una misma denominacion y naturaleza. Les fractions algébriques sont dites «de seconde intention», quand elles renferment l'inconnue au dénominateur; quand leur dénominateur est purement numérique, elles sont «de première intention». Le chapitre a donc pour objet la réduction au même dénominateur des fractions à dénominateur algébrique.

Cap. 7. Abreviar estos quebrados.

Cap. 8. Sumar estos quebrados.

Cap. 9. Diminuir estos quebrados.

Cap. 10. Multiplicar estos quebrados.

Cap. 11. Partir estos quebrados.

Reprenons le chapitre 1.

Les deux premières puissances de l'inconnue se nomment,

avons-nous dit, *cosa* et *censo*. La 3^e est le *cubo*, la 4^e est le *censo de censo*, la 5^e le *relato primo*, la 6^e le *censo de cubo* ou le *cubo de censo*. La règle générale de la formation des noms s'en déduit d'elle-même. Tous les nombres premiers exigent un nom nouveau; les puissances dont l'exposant est décomposable en facteurs se désignent en accolant les noms des facteurs.

Les dénominations de Nuñez sont alors en usage partout.

Quant aux notations, Nuñez ignore les algébristes allemands. Stifel lui même lui est complètement inconnu. Dans tout le *Libro de Algebra*, pas la moindre trace de l'influence de l'*Arithmetica Integra* ⁽¹⁾. La notation sera donc tout naturellement italienne, imitée de Paciolo ⁽²⁾ et de Cardan ⁽³⁾. Nuñez la résume dans le tableau suivant ⁽⁴⁾. Nous ajoutons dans une troisième ligne la traduction en notations modernes.

«Co. 2. Ce. 4. Cu. 8. Ce. ce. 16. Re. p^o. 32. Ce. cu. o. Cu. ce. 64.

Denominacion

1. 2. 3. 4. 5. 6.»

Signification actuelle

x , x^2 , x^3 , x^4 , x^5 , x^6 .

Donnons aussi quelques exemples d'opérations algébriques.

(1) *Arithmetica integra. Authore Michaelae Stifelio*. . . Norimbergae apud Iohan. Petreium. Anno Christi M.D.XLIII.

(2) *Suma de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalita*. . . A la dernière page: M.CCCC.LXLIII^o. xx.^a Nouembris. Venetiis.

L'ouvrage eut une réédition à Venise, en 1523, ne différant de la première que par des détails insignifiants. C'est cette dernière que je cite.

(3) Je cite Cardan d'après: *Hieronymi Cardani Opera Omnia in decem tomos digesta*. . . Lygdvni. Symptibys Ioannis Antonii Hygvetan, et Marci Antonii Ravayd. M.DC.LXIII.

Nuñez a principalement utilisé la *Practica Arithmeticae* qui parut à Milan, en 1539. Il a certainement connu aussi le *De Arte Magna*, dont la première édition est de Nuremberg, 1545.

(4) F.^o 24 v.^o

Multiplication ⁽¹⁾

| | |
|---|--|
| $ \begin{array}{r} 15 . \quad \widehat{m} . 4 . co . \\ 3 . ce . \widehat{m} . 5 . co . \\ \hline 45 . ce . \widehat{m} . 12 . cu . \\ \quad \widehat{m} . 75 . co . \widehat{p} . 20 . ce . \\ \hline \text{Suma } 65 . ce . \widehat{m} . 75 . co . \widehat{m} . 12 . cu . \end{array} $ | $ \begin{array}{r} 15 \quad - 4x \\ 3x^2 - 5x \\ \hline 45x^2 - 12x^3 \\ \quad - 75x + 20x^2 \\ \hline 65x^2 - 75x - 12x^3 . \end{array} $ |
|---|--|

Autre exemple contenant des radicaux.

La notation R. V. *Radix Universalis* désigne un radical affectant deux termes consécutifs. Ainsi l'équation ⁽²⁾

$$1 . cu . \widehat{p} . 3 . co . \text{ yguales a } . 10 .$$

$$(x^3 + 3x = 10)$$

a pour solution

$$R . V . cu . R . 26 . \widehat{p} . 5 . \widehat{m} . R . V . cu . R . 26 . \widehat{m} . 5 .$$

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} + \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5} \right) .$$

Dans le calcul suivant ⁽³⁾, Nuñez applique la formule $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{1}{2} . ce . \widehat{p} . R . V . \frac{1}{4} ce . ce . \widehat{m} . 1 . ce . \quad \frac{1}{2} x^2 + \sqrt{\frac{1}{4} x^4 - x^2}$$

$$\frac{1}{2} . ce . \widehat{m} . R . V . \frac{1}{4} ce . ce . \widehat{m} . 1 . ce . \quad \frac{1}{2} x^2 - \sqrt{\frac{1}{4} x^4 - x^2}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{4} . ce . ce . \widehat{m} . \frac{1}{4} ce . ce . \widehat{m} . 1 . ce . \\
 \quad \quad \quad 1 . ce .
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} x^4 - x^2 \text{ (sic)} \\
 \quad \quad \quad x^2 .
 \end{array}$$

(1) F.^o 28 v.^o

(2) F.^o 339 v.^o

(3) F.^o 111 v.^o

On voit la défectuosité de certaines notations. Les parenthèses n'ont pas encore été imaginées. Comment indiquer la soustraction d'une différence? Il faut pour cela une explication. C'est en effet dans une explication ajoutée au calcul que l'auteur donne le vrai résultat de l'opération 1. ce. (= x^2).

Simplification des fractions ⁽¹⁾

$$\begin{array}{r} 24 . \text{cu.} . \widehat{\text{p.}} . 96 . \text{co.} \\ 3 . \text{ce.} . \text{ce.} . \widehat{\text{p.}} . 12 . \text{ce.} \end{array} \quad \begin{array}{r} 24x^3 + 96x \\ 3x^4 + 12x^2 \end{array}$$

L'auteur divise les deux termes par 1. co. (= x), mais néglige de supprimer en outre le facteur 3. Il obtient

$$\begin{array}{r} 24 . \text{ce.} . \widehat{\text{p.}} . 96 . \\ 3 . \text{cu.} . \widehat{\text{p.}} . 12 . \text{co.} \end{array} \quad \begin{array}{r} 24x^2 + 96 \\ 3x^3 + 12x \end{array}$$

La disposition des calculs de la division s'écarte notablement de celles adoptées par les autres algébristes du xvr^e siècle. Je l'ai donnée dans ma note sur le *Libro de Algebra*. Elle est un peu longue pour être de nouveau reproduite ici; je n'y reviens pas. On peut la lire aussi dans la *Geschichte der Elementar-Mathematik* de M. Tropfke ⁽²⁾.

III

La seconde subdivision de la deuxième partie donne le calcul des radicaux.

Cap. 1. Quantas diferencias ha de raizes, y sus definiciones.

Cap. 2. Como avemos de reduzir las raizes de diversas naturalezas a otras de una misma naturaleza y denominacion con su demonstracion. Réduction des radicaux au même indice.

Cap. 3. Multiplicar las raizes.

Cap. 4. Demonstracion del multiplicar las raizes.

Cap. 5. Sumar las raizes. Il s'agit des radicaux semblables du 2^e degré.

⁽¹⁾ F.^o 42 v.^o

⁽²⁾ Leipzig, Veit, 1902-1903, t. 1, p. 325.

Cap. 6. Demonstracion del sumar las raizes.

Cap. 7. Regla general del sumar las raizes. Généralisation des règles données au chapitre 5. Extension de la règle d'addition des radicaux semblables du 2^e degré aux radicaux semblables de tous les degrés.

Cap. 8. Demonstracion desta regla general.

Cap. 9. Diminuir las raizes con su demonstracion. Soustraction des radicaux semblables du 2^e degré.

Cap. 10. Regla general para disminuir las raizes. Radicaux semblables de degrés quelconques.

Cap. 11. Demonstracion desta regla general.

Cap. 12. Repartir las raizes.

Cette partie de l'algèbre de Nuñez mérite toute l'attention. Ce n'est pas, il est vrai, pour l'importance intrinsèque du sujet qui y est étudié, mais à cause du caractère particulier des démonstrations de l'auteur. Réflexion analogue à propos de la 3^e subdivision de la seconde partie. Nuñez y donne la théorie des proportions. Comme fond il n'a rien de neuf, mais ses démonstrations sont originales et très remarquables. Nous étudierons simultanément les radicaux et les proportions. Pour éviter les redites, il me suffira d'avoir au préalable transcrit les titres des chapitres de cette dernière théorie.

Cap. 1. Definicion de la proporcion.

Cap. 2. Division de la proporcion. Classification des proportions.

Cap. 3. De la cantidad y denominacion de las proporciones racionales.

Cap. 4. Como conoceremos los numeros de la proporcion por el su nombre en estos 5 generos.

Cap. 5. Siendo nos propuestos dos numeros, como saberemos que proporcion tienen.

Cap. 6. Comparacion entre estos tres generos de proporcion. la de ygualdad, y la de mayor desigualdad, y la de menor desigualdad.

Cap. 7. De la composicion de las proporciones.

Cap. 8. Siendo nos propuestas dos proporciones, como conoceremos qual dellas es la mayor, y como sacaremos una de otra.

Cap. 9. Siendo nos propuestas dos proporciones, como conoceremos qual sea la proporcion que dellas justamente es compuesta, y quales son entre si commensurables.

Cap. 10. Si las dos proporciones que queremos comparar, fueren entrambas irracionales, o una fuere racional, y la otra irracional, como conoceremos si son commensurables,

Cap. 11. De la composicion de las proporciones, que se haze por la composicion de los terminos.

Cap. 12. Por el noto conoser lo ignoto en las proporciones.

Cap. 13. Del multiplicar y partir en las proporciones.

Cap. 14. De los medios proporcionales.

Cap. 15. De las raizes de los binomios.

Les algébristes du xvi^e siècle s'entendent parfaitement à donner, de leurs règles, des démonstrations correctes, ne prêtant en rien le flanc à la critique. Mais ces démonstrations sont alors purement géométriques. Le fait est d'observation générale. Que s'ils annoncent une démonstration algébrique sans géométrie, c'est un leurre. Ces prétendues démonstrations sont, en ce cas, de simples vérifications numériques. On propose une question, on formule une règle de solution, on montre enfin, par un exemple, qu'en suivant la règle énoncée on arrive au résultat. Quant à expliquer la nature intime de la règle, à prouver par un raisonnement vraiment algébrique pourquoi elle donne nécessairement la solution, on n'en a cure; c'est affaire à la géométrie.

Jordan de Némore fait en cela une glorieuse exception ⁽¹⁾.

Au lieu de représenter à la manière d'Euclide les divers éléments de la démonstration à la fois par une lettre et par une ligne, Jordan néglige la ligne, comme inutile, et fait le raisonnement sur les lettres seules. C'est de la vraie algèbre. On trouve, il est vrai, quelques exemples isolés de cette méthode, antérieurement à Jordan; M. Eneström l'a fort bien montré ⁽²⁾. Mais Jordan, le premier, l'emploie d'une manière systématique.

Jordan de Némore venait avant l'heure. Il planait trop haut

(1) Dans son *Arithmetica decem libris demonstrata*... Parisiis in Officina Henrici Stephani... (1514). L'ouvrage eut une première édition, à Paris, en 1496, chez Jean Higman et Wolfgang Hopilius.

(2) *Bibliotheca Mathematica*, 3^e ser., t. 7. Leipzig, 1906-1907, pp. 85-86.

Il y a dans cette question des origines de l'algèbre littérale un côté parfois un peu trop perdu de vue. Les lettres de leur alphabet avaient pour les Grecs une valeur numérique parfaitement déterminée et jouaient chez eux le rôle de nos chiffres arabes. Les Euclide, les Archimède, les Apollonius ne pouvaient donc avoir grand goût pour une algèbre purement littérale. S'ils en eurent l'idée, elle leur répugnait. L'algèbre littérale perdait pour eux son caractère de généralité, c'est-à-dire son plus grand avantage. Elle leur présentait tous les inconvénients que nous offrirait, à nous, des démonstrations algébriques faites sur des chiffres arabes. Pour les Grecs l'élément symbolique abstrait sur lequel porte le raisonnement, c'est, à proprement parler, la ligne elle-même; la lettre est un simple numéro d'ordre servant à distinguer une ligne d'une autre.

sur ses contemporains pour en être compris. De l'illustre allemand à Viète il s'écoule deux siècles et demi. Pendant ce long espace de temps seul, jusqu'ici, un sicilien, l'abbé Maurolyco ⁽¹⁾, semblait avoir apprécié l'importance de la découverte. A son nom, il faudra adjoindre désormais celui de Nuñez. Ce restera l'un des titres de gloire de l'algébriste portugais.

Admirons, par exemple, le caractère déjà bien moderne de la démonstration suivante. Il s'agit de la réduction des radicaux au même indice.

«La demonstracion sera esta: ⁽²⁾

«Pongamos que una de las raizes sea a , y el numero del qual es raiz sea b , y su denominacion sea c .

$$\text{(soit } \sqrt[c]{b} = a \text{)}$$

«Y pongamos que la otra raiz es d , y el numero del qual es raiz sea e , y su denominacion f .

$$\text{(soit encore } \sqrt[f]{e} = d \text{)}$$

«Multiplicaremos b en si, y despues si cumpliere por lo producido, conforme a la denominacion f . De tal modo que esse numero b , sea hecho raiz del numero produzido, el qual sea g , y su denominacion sera f .

$$\text{(posons } b^f = g, \quad \text{d'où} \quad b = \sqrt[f]{g} \text{)}$$

«Iten, multiplicaremos e en si, y despues si cumpliere por lo producido, conforme a la denominacion c . De tal modo que esse numero e sea hecho raiz del numero produzido el qual sea h , y su denominacion c .

$$\text{(posons } e^c = h, \quad \text{d'où} \quad e = \sqrt[c]{h} \text{)}$$

«Y multiplicaremos c por f , denominacion por denominacion, y el numero produzido sea k .

$$\text{(c} \times \text{f} = k \text{)}$$

«Digo que a sera raiz de g denominada de k , y que d sera

(1) *Francisci Maurolyci Arithmeticonum libri duo nunc primum in lucem editi*. . Venetiis. Apud Franciscum Francisium Senensem. M.D.LXXV.

(2) Ff. 46 v. 47 r.

raiz de h denominada tambien de k .

$$(\text{Je dis que } a = \sqrt[c]{g} \quad \text{et} \quad d = \sqrt[h]{h})$$

«Porque pues a es raiz de b denominada de c , tantas proporciones aura luego de b para la unidad, cada una dellas ygal a la proporcion de a para la unidad, quantas son las unidades que tiene la denominacion c .

$$\left(\frac{b}{1} = \frac{a}{1} \times \frac{a}{1} \times \dots \times \frac{a}{1} \right)^{c \text{ fois}}$$

«Y porque b es raiz de g denominada de f , tantas proporciones aura de g para la unidad, cada una dellas ygal a la proporcion de b para la unidad, quantas son las unidades que tiene la denominacion f .

$$\left(\frac{g}{1} = \frac{b}{1} \times \frac{b}{1} \times \dots \times \frac{b}{1} \right)^{f \text{ fois}}$$

«Por lo qual tantas proporciones aura de g para la unidad, cada una dellas ygal a la proporcion de a para la unidad, quantas unidades tiene el numero que se produze multiplicando c en f , el qual es k .

$$\left(c \times f = k, \quad \text{done } \frac{g}{1} = \frac{a}{1} \times \frac{a}{1} \times \dots \times \frac{a}{1} \right)^{k \text{ fois}}$$

«Y sera por tanto a raiz de g denominada de k .

$$(a = \sqrt[k]{g})$$

«Por la misma arte demostraremos que d es raiz de h denominada de k , que es comun denominador.

$$(d = \sqrt[k]{h})$$

«Y esta demonstracion es universal, ora el a y el d sean numeros, ora sean quantidades sordas (*c. à d. des radicaux*).»

Ni chez Stifel, ni chez Cardan, on ne trouverait une g^e écrite dans ce style.

J'ai l'embarras du choix pour en trouver d'autres. Il s'agit, par exemple, de démontrer ce théorème:

Etant donnés les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on aura $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, suivant que $a \times d \geq c \times b$.

«La demonstracion desta regla es muy facil⁽¹⁾.

«Sea la primera proporcion de a para b , y la segunda de c para d ; y multiplicando a por d haga e , y c por b haga f .

$$\left(\text{soit } \frac{a}{b} \text{ et } \frac{c}{d}; \quad \text{posons } a \times d = e, \quad b \times c = f \right)$$

«Digo, que si e fuere mayor que f , mayor sera la proporcion de a para b que de c para d ; y si menor, sera menor; y si fuere ygal, sera ygal.

$$\left(e \geq f \text{ entraine respectivement } \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \right)$$

«Porque sea g lo que se haze multiplicando b por d , o d por b , que es lo mismo

$$(g = b \times d = d \times b)$$

«Y pues a y b multiplicados por d hizieron e y g , sera de a para b , como de e para g .

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{e}{g} \right)$$

«Y porque c y d multiplicados por b hizieron f y g , sera de c para d , como de f para g .

$$\left(\frac{c}{d} = \frac{cb}{db} = \frac{f}{g} \right)$$

«Pongamos que e y f son hallados yguales, sera luego de e para g , como de f para g ; y porque de a para b es como de e para g , y de c para d , es como de f para g , sera luego de a para b , como de c para d .

$$\left(\text{si } e = f, \quad \text{on a } \frac{e}{g} = \frac{f}{g}, \quad \text{d'où } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right)$$

(1) Ff.º 82 v.º-83 r.º
VOL. III — N.º 4

«Y si e fuere hallado mayor que f , mayor sera la proporcion de e para g , que de f para g , por la 8 del quinto; y porque de a para b es como de e para g , y de c para d es como de f para g , sera luego la proporcion de a para b , mayor que la de c para d .

$$\left(\text{si } e > f, \quad \text{on a } \frac{e}{g} > \frac{f}{g}, \quad \text{d'où } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \right)$$

«Pero si e fuere hallado menor que f , sera por la misma demonstracion menor proporcion de a para b , que de c para d .

$$\left(\text{si } e < f, \quad \text{on a de même } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \right) »$$

Avant de quitter ce sujet, constatons un fait important.

Ni Jordan de Némore, ni Maurolyco, ni Nuñez n'ont l'idée de laisser dans leurs résultats la trace des données. C'eût été trop leur demander. Ce progrès immense dans les notations algébriques est dû tout entier à Viète. Ce sera son éternel honneur de l'avoir imaginé. Quant à ses prédécesseurs ils croient indispensable de représenter par une lettre nouvelle chaque résultat des opérations. Chose toute naturelle, si on vent bien réfléchir à la manière dont fut créée l'algèbre.

Pour nous, hommes du xx^e siècle, l'algèbre est une généralisation de l'arithmétique. Nous ne la concevons plus autrement. Viète a donc fondé l'algèbre en généralisant les opérations de l'arithmétique. Cela nous semble évident a priori.

Énoncée en ces termes la proposition est absolument fausse.

On ne l'a peut-être pas assez remarqué, l'algèbre a pour origine première non pas une généralisation de l'arithmétique, mais une simplification des démonstrations géométriques. Jordan de Némore eut un trait de génie (dans cette appréciation je reste, malgré les quelques critiques qu'on lui a faites, de l'avis de M. Cantor) ⁽¹⁾; Jordan de Némore donc aperçoit d'un coup d'œil d'aigle l'inutilité des lignes dans un grand nombre des démonstrations d'Euclide. Le géomètre grec emploie à la fois lignes et lettres, mais son raisonnement tout entier reste debout en se servant des lettres seules. Jordan le voit clairement. Il supprime donc hardiment les lignes et garde le reste. Mais

⁽¹⁾ *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2^e ed. t. 2, Leipzig, 1900, p. 61.

Euclide représente toutes les constructions exécutées sur les lignes par des lettres nouvelles. Jordan conservant intégralement dans l'algorithme du raisonnement d'Euclide toute la partie littéraire, agit naturellement de même. C'eût été exiger vraiment trop que de lui demander d'aller du premier coup plus loin. Il ne pouvait pas avoir l'idée de faire davantage. Ses démonstrations ont déjà un caractère tellement abstrait, tellement moderne, que pendant longtemps elles restèrent sans imitateurs. On sait avec quelle difficulté se changent des habitudes prises; avec quelle lenteur se généralise l'emploi d'une notation nouvelle. Pour concevoir combien, même au xvi^e siècle, le raisonnement sur lettres inventé par Jordan paraissait encore insolite et compliqué, il faut se rappeler quel petit nombre de géomètres en vit les avantages: Viète, et avant lui Maurolyco et Nuñez; c'est tout. Et cependant nous sommes au siècle de ces savants si originaux, si indépendants, si innovateurs, qui se nomment Cardan et Stifel!

IV

La troisième partie du *Libro de Algebra* en est la plus longue; c'est aussi la plus importante. Nuñez y reprend la résolution des équations, sujet sommairement traité déjà dans la première partie. Il le développe cette fois d'une manière beaucoup plus complète.

Cette troisième partie, divisée en 7 chapitres seulement, se clot par une postface au lecteur écrite contre Tartaglia. Cinq des chapitres sont théoriques, les deux autres consacrés aux applications.

Pour la clarté, transcrivons en les titres.

Cap. 1. Como se deve de hazer la ygualacion assi en las dignidades enteras, como en los quebrados y raizes.

Cap. 2. De las nuestras reglas que responden a las tres de las conjugaciones compuestas, que estan en la primera parte.

Cap. 3. De las reglas semejantes a las simples de la primera parte.

Cap. 4. De la regla general para las conjugaciones compuestas, en las quales las dignidades fueren proporcionales.

Cap. 5. De la practica de las reglas de Algebra en los casos de Arithmetica, que son 110.

Cap. 6. De la regla de la cantidad simple, o absoluta, con sus casos.

Cap. 7. De la practica de Algebra en los casos o exemplos de Geometria.

Postface. El auctor desta obra a los lectores.

Ne nous occupons pas pour le moment des chapitres 5 et 7, nous y reviendrons tantôt. Quant aux autres ce sont les plus importants de l'ouvrage. Ils ont fait de ma part l'objet d'une étude antérieure ⁽¹⁾, dont voici les conclusions.

Au chapitre 1, il faut joindre la postface, qui lui sert d'appendice. Ils suffiraient, à eux seuls, pour faire de Nuñez un maître. L'auteur y traite de la résolution de l'équation du 3^e degré. La formule donnée par Tartaglia, dit-il, n'est pas pratique. Elle est toute compliquée de radicaux même quand la racine est rationnelle. Il faut trouver autre chose et mieux. Voici comment :

Ecrivons l'équation du 3^e degré sous la forme

$$x^3 - ax^2 + bx + c.$$

Retranchons aux deux membres un cube p^3 convenablement choisi, puis divisons les par $x - p$; l'équation sera ramenée au 2^e degré.

La règle est évidemment correcte, car si p est une racine de la proposée on a

$$p^3 = ap^2 + bp + c$$

d'où

$$x^3 - p^3 = a(x^2 - p^2) + b(x - p).$$

Malheureusement ajoute Nuñez, on n'a pas encore trouvé de règle générale pour déterminer à coup sûr le cube à retrancher aux deux membres. Il donne cependant à ce sujet quelques conseils pratiques. Mais encore une fois, tout ceci a fait l'objet principal de ma note sur le *Libro de Algebra* publiée dans la *Bibliotheca Mathematica*. J'y ai dit aussi l'influence de la méthode de Nuñez sur les idées de Simon Stevin et d'Adrien Romain, notamment sur leur méthode de résolution des équations numériques. Je n'y reviens pas.

Dans le chapitre 2 il est question d'une règle pour la résolution de l'équation de 2^e degré dont Nuñez revendique hautement la paternité. Je l'ai exposée jadis, d'après Guillaume Gosselin, dans l'étude que j'ai consacrée au *De Arte Magna* de cet

(1) Dans l'article de la *Bibliotheca Mathematica*, cité ci-dessus.

auteur⁽¹⁾. La lecture du texte original de Nuñez m'engage à rectifier un point de détail. Voici en réalité la manière de procéder de l'algébriste portugais.

Etant donnée l'équation du 2^e degré sous les trois formes classiques alors en usage

$$ax^2 - bx = c; \quad ax^2 + bx = c; \quad bx = ax^2 + c;$$

au lieu de diviser tous les termes de l'équation par a , comme le veut la règle, multipliez les au contraire par a , de manière à rendre le terme en x^2 carré parfait. Prenez ax comme inconnue auxiliaire. Appliquez lui la règle générale. Divisez enfin par a la valeur ainsi trouvée; vous aurez x .

Le chapitre 3 donne la résolution de

$$ax^m = bx^n.$$

Supposons $m > n$. On ramène la proposée à la forme

$$x^{m-n} = \frac{b}{a} \quad \text{d'où } x = \sqrt[m-n]{\frac{b}{a}}.$$

Rien de spécial à y remarquer.

Le chapitre 4 traite de l'équation

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0$$

dont la solution était connue depuis longtemps.

Enfin le chapitre 6 a pour objet les équations à plusieurs inconnues. Quel que fût le nombre réel des inconnues d'un problème, Diophante n'employait jamais plus d'un signe cossique, disons une lettre, pour les représenter. Paciolo et Cardan introduisent l'usage des lettres multiples et résolvent de vrais systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Nuñez n'aime pas cette méthode. Il l'expose cependant, mais dans le but avoué d'en montrer la complication. D'après lui, il vaut mieux s'en passer. Opinion étrange, partagée par beaucoup des contemporains et par les plus illustres; Gemma Frisius, par exemple! (2)

(1) *Bibliotheca Mathematica*, 3^e série, t. 7, p. 58.

(2) Voir ma note: *Le commentaire de Gemma Frisius sur l'Arithmetica Integra de Stifel*. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, t. 30, 1^{re} part. Bruxelles, 1906, pp. 167-168. Dans la *Logistica* (pp. 193-196) Butéon se propose un système fort simple de 4 équations à 4 inconnues,

Le système d'équations choisi par Nuñez est intéressant, parce que malgré son caractère tout à fait élémentaire, on le trouve, avec les mêmes données numériques chez les principaux algébristes du xvi^e siècle. Tous, sans exception, en parlent comme d'un problème compliqué et difficile. Proposé une première fois par Cardan, dans sa *Practica Arithmetica* ⁽¹⁾, puis dans son *De Arte Magna* ⁽²⁾, l'exercice est repris plus tard par Peletier sous deux formes différentes ⁽³⁾. L'algébriste français traduit d'abord, «pas à pas», comme il le dit, la longue solution de Cardan ⁽⁴⁾; puis il en essaye une deuxième dans le style de Stifel. Elle est meilleure sans être déjà aisée ni élégante. Si les faits n'étaient là, patents, indéniables, jamais on ne croirait aux obstacles contre lesquels se butèrent les premiers algébristes pour résoudre les systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Preuve singulière de l'influence de l'éducation et du milieu ambiant, sur le développement de l'intelligence humaine! C'est aussi curieux qu'instructif à observer.

Dans mon analyse de l'*Algèbre* de Jacques Peletier du Mans, j'ai reproduit au long la traduction de Cardan par Peletier. J'y ai ajouté la critique de Cardan par ce dernier, avec la vraie manière de traiter, d'après lui, le problème ⁽⁵⁾. Écoutons maintenant Nuñez: il ne perdra rien à être comparé à Peletier et à Cardan.

Il s'agit de trouver trois nombres A, B et C, vérifiant les relations ⁽⁶⁾

$$A + \frac{1}{2}(B - C) = 32; \quad B + \frac{1}{3}(A + C) = 28; \quad C + \frac{1}{4}(A + B) = 31.$$

dans lequel il s'embrouille complètement à trois reprises différentes et qu'il ne parvient à résoudre que par tâtonnements. Il termine sa théorie des équations à plusieurs inconnues par cette réflexion découragée (p. 196). «Si cui modus iste calculi videatur obscurior in hac regula, ejus est etiam rarior usus, certo sciat alium communiter usurpatum longe plus afferre molestiae, multoque difficilius capi. Innata enim rebus ipsis obscuritas arte quidem levare potest, tolli autem nullo modo.»

Pour plus de détails, sur l'histoire de la résolution des équations à plusieurs inconnues au xvi^e siècle, voir mes mémoires sur l'*Algèbre* de Peletier et le *De Arte Magna* de Gosselin.

(1) *Opera omnia*, t. 4, pp. 73-74.

(2) *Opera omnia*, t. 4, pp. 241-242. Cette solution diffère de la précédente.

(3) *Algèbre*, pp. 107-112.

(4) Il s'agit de la solution donnée dans le *De Arte Magna*.

(5) Pp. 153-154.

(6) Fl. 224 v.°-225 r.°

Remarquons le en passant, dans sa *Summa*, Luc Paciolo traite par la

«Teremos tres numeros, que el primero con la mitad de los otros, haze 32; y el segundo con el tercio de los otros dos, haze 28; y el tercero con el quarto de los otros dos, haze 31; y queremos saber quanto es cada uno dellos.

«Ponemos que el primero es 1. co. x
y seran luego la mitad del segundo y tercero
 $32. \widehat{m}. 1. \text{co.}$ $32 - x$

y el segundo y tercero $64. \widehat{m}. 2. \text{co.}$ $64 - 2x$

y pues el primero es 1. co. seran luego todos tres numeros $64. \widehat{m}. 1. \text{co.}$ $64 - x$

«Agora ponemos que el segundo es 1 cantidad y

y sera por esta cuenta el primero y el tercero
juntos $64. \widehat{m}. 1. \text{co.}$ y $\widehat{m}. 1. \text{cantidad}$ $64 - x - y$

y el tercio dellos sera $21 \frac{1}{3}. \widehat{m}. \frac{1}{3}. \text{co.}$ $\widehat{m}. \frac{1}{3}$

de cantidad

$$21 \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y$$

«Y juntando con esto el segundo que es 1. cantidad, haremos

$21 \frac{1}{3}. \widehat{m}. \frac{1}{3}. \text{co.}$ $\widehat{p}. \frac{2}{3}$ de cantidad que seran yguales a 28.

$$\left(21 \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 28 \right).$$

«Ygualearemos restaurando lo diminuto, y ternemos

$21 \frac{1}{3}. \widehat{p}. \frac{2}{3}$ de cantidad yguales a $28. \widehat{p}. \frac{1}{3}. \text{co.}$

$$\left(21 \frac{1}{3} + \frac{2}{3}y = 28 + \frac{1}{3}x \right)$$

«quantité sourde», c'est-à-dire, par une deuxième inconnue, des problèmes absolument analogues. Par exemple:

1.º Dist. 9, tract. 9, N.º 26, ff. 191 v.º-192 r.º

$$A + \frac{1}{2}(B + C) = 90; \quad B + \frac{1}{3}(A + C) = 80; \quad C + \frac{1}{4}(A + B) + 6 = 87.$$

2.º Dist. 9, tract. 9, N.º 27, ff. 192 r.º

$$A + \frac{1}{2}(B + C) = 50; \quad B + \frac{1}{3}(A + C) = 50; \quad C + \frac{1}{4}(A + B) = 50$$

y sacando lo superfluo que es $21\frac{1}{3}$, quedaran

$\frac{2}{3}$ de cantidad yguales a $6\frac{2}{3} \cdot \widehat{p} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{co.}$

$$\left(\frac{2}{3}y = 6\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right)$$

y sera luego

una cantidad ygal a $10 \cdot \widehat{p} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{co.}$

$$\left(y = 10 + \frac{1}{2}x\right).$$

«Y porque pusimos el segundo ser 1. cantidad sera luego
segundo $10 \cdot \widehat{p} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{co.}$ $10 + \frac{1}{2}x$

«Por esta manera ayudando nos del termino cantidad, alcançamos quanto fuese el segundo.

«Sacando pues de todos tres que son $64 \cdot \widehat{m} \cdot 1 \cdot \text{co.} (= 64 - x)$
el valor del primero que es $1 \cdot \text{co.} (= x)$, y el valor del se-
gundo, que avemos hallado ser $10 \cdot \widehat{p} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{co.} \left(= 10 + \frac{1}{2}x\right)$,
quedaran $54 \cdot \widehat{m} \cdot 2 \cdot \text{co.} \cdot \frac{1}{2}$ por valor del tercero $\left(54 - 2\frac{1}{2}x\right)$.

«Con el qual juntaremos $21\frac{1}{2} \cdot \widehat{p} \cdot \frac{3}{8} \cdot \text{co.} \left(= 21\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x\right)$
que es el quarto del primero y segundo, y haran

$56\frac{1}{2} \cdot \widehat{m} \cdot 2 \cdot \text{co.} \cdot \frac{1}{8}$ que seran yguales a 31.

$$\left(56\frac{1}{2} - 2\frac{1}{8}x = 31\right).$$

«Ygualaremos y resultaran

$25\frac{1}{2}$ yguales a $2 \cdot \text{co.} \cdot \frac{1}{8}$.

$$\left(25\frac{1}{2} = 2\frac{1}{8}x\right)$$

y partiremos $25 \frac{1}{2}$ por $2 \frac{1}{8}$ y vernan 12 por valor de la cosa

«Y tanto sera el primero numero.

«Y porque el segundo era $10 \cdot \widehat{p} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{co.}$
sera por esta cuenta 16 .

«Y porque el tercero era $54 \cdot \widehat{m} \cdot 2 \cdot \text{co.} \cdot \frac{1}{2}$
sera por esta cuenta 24 . porque las

x

$$10 \div \frac{1}{2} x$$

$$y = 16$$

$$54 - 2 \frac{1}{2} x$$

$$2 \cdot \text{co.} \cdot \frac{1}{2} \text{ valen } 30 .$$

$$\left(2 \frac{1}{2} x = 30 \right) » .$$

Le troisième nombre vaut 24.

Núñez ajoute ⁽¹⁾:

«Pero nos avemos tratado esto mismo exemplo, que es el caso 51 (des exercices résolus au chapitre 5), y lo practicamos muy facilmente, y brevemente por la cosa, sin usar de la cantidad absoluta. Y todos los casos que Fray Lucas practica por la cantidad, practicamos nos por las reglas de la cosa, sin ayuda deste termino cantidad.»

Au passage indiqué, Núñez résout effectivement le même problème par une seule inconnue ⁽²⁾. Quant à son avis sur la facilité relative des deux solutions, il ne rencontrerait plus aujourd'hui un seul géomètre pour le partager.

V

On ne saurait trop appeler l'attention sur les 110 problèmes du chapitre 5. Avec les démonstrations littérales sur les radicaux et les proportions, ce sont eux qui donnent au *Libro de Algebra* son caractère si particulier, déjà si moderne.

Considéré dans son ensemble ce chapitre de Núñez n'a d'analogie, chez aucun contemporain. Núñez à un certain point de

(1) F.º 225 v.º

(2) Ff.º 169 v.º-170 r.º

vue surpasse tous ses émules, même les plus illustres, même les Cardan et les Stifel. Du premier au dernier sans une exception, les problèmes du chapitre 5 sont des exercices abstraits sur les nombres. Plus de ces tonneaux de vin, plus de ces aunes de drap, plus de ces querelles de voleurs, plus de ces récréations mathématiques, qui donnent par moments aux plus savantes algèbres du xvi^e siècle le cachet enfantin de manuels d'enseignement primaire. L'*Arithmetica integra* de Stifel, le *De arte magna* de Cardan eux-mêmes n'y échappent pas complètement.

Le style de Nuñez se ressent, semble-t-il, de celui de Diophante. Je le sais, l'édition de Xylander n'avait pas encore paru ⁽¹⁾, mais rien n'empêchait notre auteur de connaître l'algèbre grec par les manuscrits.

Quant au genre des problèmes, il diffère chez Diophante et chez Nuñez. Nuñez n'a, à proprement parler, aucun exercice d'analyse indéterminée. Tous les problèmes, à l'exception de deux, se ramènent à une équation déterminée à une inconnue; encore la solution de l'une des deux exceptions est-elle si embrouillée que l'auteur ne remarque pas l'indétermination.

Convenait-il d'en donner ici la liste complète?

Un moment j'ai hésité, je l'avoue, devant la longueur d'une pareille énumération. La rareté du *Libro de Algebra* m'a engagé à passer outre. J'ose l'espérer on ne le regrettera pas.

Pour abrégér les énoncés je parlerai cependant un langage conventionnel. Les nombres se désigneront par les lettres a , b , c , d ...; les conditions auxquelles ils doivent satisfaire par des égalités. En reprenant ensuite l'énoncé en langage vulgaire, sans lettres ni notations algébriques, il sera aisé de reconstituer le problème à peu près sous sa forme primitive.

L'auteur n'emploie jamais plus d'une inconnue; il importe de ne pas l'oublier. Malgré cette restriction quelques problèmes restent néanmoins simples, très simples mêmes; mais d'autres demandent alors de l'attention et deviennent difficiles.

Je ne dois pas le dire, pour l'historien des mathématiques les énoncés du chapitre 5, sont du plus haut intérêt: ils lui permettent, documents en main, de comparer Nuñez à ses principaux contemporains. Puis-je espérer qu'ils feront passer aussi une heure agréable aux géomètres pour qui l'histoire de leur science est l'objet d'un simple délassement? Rien ne peut leur

(1) L'édition de Diophante, par Xylander, parut à Bâle, en 1575.

donner une meilleure idée de l'état de l'algèbre, au moment où Viète va venir la transformer complètement.

$$1. \quad a + b = 30; \quad a + 3 = 2(b + 5).$$

$$2. \quad 4a^2 - 20 = 100.$$

$$3. \quad a + b = 12; \quad a^2 + b^2 = 30.$$

$$4. \quad a - b = 2; \quad a^2 - b^2 = 30.$$

$$5. \quad a + b = 20; \quad \frac{a}{b} = 20.$$

$$6. \quad 5\frac{1}{4}\left(a - \frac{3}{7}a\right) = a + 5\frac{1}{4}.$$

$$7. \quad a + b = 30; \quad b = \frac{3}{5}a + 4.$$

$$8. \quad a = 2b; \quad ab = 10.$$

$$9. \quad \frac{18 - a}{15 - a} = \frac{3}{2}.$$

Au lieu de résoudre tout bonnement l'équation par rapport à a , Nuñez pose $15 - a = x$.

$$10. \quad 3 + 5a = 2(2 + a).$$

$$11. \quad b = 2a; \quad ab + a^2 + b^2 = 70.$$

$$12. \quad a + b = 10; \quad ab = 4a^2.$$

$$13. \quad 6a^2 = 2a^3.$$

$$14. \quad a + b = 20; \quad 4a + 6b = 5.$$

$$15. \quad a + b = 20; \quad 4a = 3(5b).$$

$$16. \quad a + b = 20; \quad \frac{a}{4} = 3\left(\frac{b}{5}\right).$$

$$17. \quad b = \frac{3}{2}a; \quad c = \frac{3}{2}b; \quad \text{avec } ab = c, \quad \text{ou } ab = \frac{c}{2}, \quad \text{ou } ab = 10c.$$

Nuñez ne tient naturellement aucun compte de la solution $a = b = c = 0$.

$$18. \quad a + b + c = 20; \quad 9(2a) = 3(4b) = 8c.$$

$$19. \quad a + b + c = 20; \quad 2a = 3b; \quad 4b = 5c.$$

$$20. \quad a + b + c = 100; \quad \frac{a}{3} = 4b = \frac{c}{5}.$$

$$21. \quad a + b + c = 100; \quad \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}.$$

$$22. \quad a + b + c = 100; \quad 3\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{b}{5}; \quad 3\left(\frac{b}{5}\right) = \frac{c}{6}.$$

$$23. \quad a + b = 10; \quad 10 - a = a - b.$$

$$24. \quad b = 2a; \quad \frac{a}{4} \cdot \frac{b}{3} = 20.$$

$$25. \quad \frac{30}{4a} = 1 \frac{1}{2} a.$$

$$26. \quad b = \frac{3}{2} a; \quad c = \frac{3}{2} b; \quad abc = 12.$$

$$27. \quad a \sqrt{a} = 4.$$

$$28. \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{3}.$$

$$29. \quad a + b = 10; \quad a^2 - b^2 = 100 - a^2.$$

$$30. \quad ab - \frac{3}{2} a = \frac{4}{3} b.$$

$$31. \quad a + b + c + d + e + f = 60; \quad f - e = e - d = d - c = c - b = b - a = 3.$$

$$32. \quad a + b + c + d + e + f = 60; \quad a = 5; \quad f - e = e - d = d - c = c - b = b - a.$$

La raison $b - a$ de la progression est prise pour inconnue.

$$33. \quad a + b = 12; \quad a + \frac{1}{3} b = 7.$$

$$34. \quad a + b = 12; \quad a + \frac{1}{6} b = b + \frac{1}{5} a.$$

$$35. \quad a + \frac{1}{5} b = 8; \quad b + \frac{1}{6} a = 11.$$

$$36. \quad 2(b-2) = a+2; \quad 3(a-2) = b+2.$$

$$37. \quad 8+a = 12 + \frac{1}{8}a.$$

$$38. \quad a+b+c+d = 127; \quad b+c+d+e = 119; \\ c+d+e+a = 109; \quad d+e+a+b = 104; \quad e+a+b+c = 97.$$

$$39. \quad \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{16}a^2 = a.$$

$$40. \quad a+b+c+d+e = 100; \quad b = a+3; \\ c = b+7; \quad d = c+10; \quad e = d+20.$$

$$41. \quad a+b+\frac{1}{2}c = 100; \quad b+c+\frac{1}{3}a = 100; \quad c+a+\frac{1}{4}b = 100.$$

$$42. \quad a+\frac{2}{3}(b+c) = 100; \quad b+\frac{3}{4}(c+a) = 100; \quad c+\frac{4}{5}(a+b) = 100.$$

$$43. \quad a+\frac{2}{3}(b+c+d) = 40; \quad b+\frac{3}{4}(a+c+d) = 40; \\ c+\frac{4}{5}(a+b+d) = 40; \quad d+\frac{5}{6}(a+b+c) = 40.$$

Solution: $a = 24$, $b = 16$, $c = 8$, $d = 0$. Cette solution déplaît à Nuñez⁽¹⁾.

$$44. \quad a+\frac{1}{2}b = 60; \quad b+\frac{1}{3}c = 60; \quad c+\frac{1}{4}a = 60.$$

$$45. \quad a+b+c = d;$$

$$a - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c\right) = \frac{1}{2}d;$$

$$b - \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c\right) = \frac{1}{3}d;$$

(1) F.^o 165 v.^o. «Esto que en este caso avemos obrado ygualando 40 con $40 \cdot \frac{3}{5}$. co. y concluyendo que cifra de numero es ygual a $\frac{3}{5}$. co. es lo que communmente los Arithmeticos practicos dicen, pero es fuera de my opinion, y lo contrario tengo escripto.

$$c - \frac{1}{5}c + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c\right) = \frac{1}{6}d.$$

Nuñez pose $d = 6x$, puis par un raisonnement très embrouillé il arrive à la solution

$$a = 177, \quad b = 92, \quad c = 25, \quad d = 294.$$

Il prouve ensuite minutieusement que cette solution convient, mais ne s'aperçoit pas que le problème est indéterminé. Non seulement Stifel, mais même Peletier, Petri ou Gosselin, habitués à manier des systèmes d'équations à plusieurs inconnues, eussent, probablement, tout au moins vu sans peine que la solution

$$a = k.177, \quad b = k.92, \quad c = k.25, \quad d = k.294,$$

convient également.

$$46. \quad \frac{ab}{a-b} = 16.$$

Le problème est indéterminé; mais cette fois l'auteur le remarque.

$$47. \quad a + \frac{1}{8}b = 6\left(b - \frac{1}{8}b\right); \quad b + \frac{1}{4}a = 6\left(a - \frac{1}{4}a\right).$$

$$48. \quad a + 10 = b - 10; \quad b + 10 = 2(c - 10); \quad c + 10 = 3(a - 10).$$

$$49. \quad a + d = 2(b + c) = 100; \quad b + d = 115; \quad c + d = 120.$$

$$50. \quad a + \frac{1}{3}b + 4 = 2\left(b - \frac{1}{3}b\right); \quad b + \frac{1}{2}a + 6 = 5\left(a - \frac{1}{2}a\right).$$

$$51. \quad a + \frac{1}{2}(b + c) = 32; \quad b + \frac{1}{3}(a + c) = 28; \quad c + \frac{1}{4}(a + b) = 31.$$

Cet exercice dû à Cardan est classique chez les algébristes du xvi^e siècle. Nous l'avons déjà rencontré, car, on se le rappelle, c'est précisément l'exemple choisi par Nuñez pour expliquer la résolution des systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Dans la solution actuelle il n'en emploie qu'une seule. Je ne le repète plus, d'après lui cette solution est la bonne solution; l'autre un objet de pure curiosité.

$$52. \quad a + b = 10; \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = 4.$$

$$53. \quad a + b = 10; \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \frac{16}{21}.$$

$$54. \quad a + b = 10; \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2} ab.$$

$$55. \quad a + b = 8; \quad \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = 18 \frac{2}{3}.$$

$$56. \quad b = 2 \frac{1}{2} a; \quad b - a = 9.$$

$$57. \quad a \cdot \frac{a}{3} = 20.$$

$$58. \quad a + b + c + d = 12; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad a + c = 4; \quad b + d = 12.$$

Nuñez exprime explicitement les cinq conditions. Dans les longs énoncés du xvi^e siècle formulés en langage ordinaire, sans notations algébriques, la surabondance des conditions se déguise avec une facilité relative. Ne sautant pas immédiatement aux yeux, elle n'est pas choquante.

$$59. \quad 2a + a^2 = 15.$$

$$60. \quad 3a^2 + 4a = 20.$$

$$61. \quad (a + 1)a = 24.$$

$$62. \quad a + 20 = a^2.$$

$$63. \quad 6a = a^2 + 8.$$

$$64. \quad a + b = 8; \quad a^2 + b^2 + ab = 49.$$

$$65. \quad a + b = 12; \quad \sqrt{a} \sqrt{b} = 5.$$

$$66. \quad ab = 6; \quad a^2 + b^2 = 5.$$

$$67. \quad a + b = 18; \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2.$$

$$68. \quad a + b = 10; \quad a^2 + b^2 = 60.$$

$$69. \quad a + b = 8; \quad a^2 + b^2 + ab = 20.$$

$$70. \quad a + b = 10; \quad \frac{a}{\sqrt{20} - b} = \sqrt{20}.$$

$$71. \quad a^2 + b^2 = 30; \quad ab = 10.$$

Solution très intéressante. Nous y reviendrons.

$$72. \quad a + b = 10; \quad a^2 = 3b^2.$$

$$73. \quad a^2 + b^2 = 34; \quad a + b + ab = 23.$$

$$74. \quad ab = 10; \quad a + b + a^2 + b^2 = 36.$$

$$75. \quad a + b = 12; \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 18.$$

$$76. \quad a + 30 = \frac{5}{3}(b - 30); \quad b + \frac{30}{b}.a = 7\left(a - \frac{30}{b}.a\right).$$

$$77. \quad a + \frac{9}{a}.b = b - \frac{9}{a}.b + 18; \quad a - \frac{10}{b}.a = b + \frac{10}{b}.a - 24.$$

Exercice dont il doit l'idée, dit-il, à frère Luc de Burgo (4).

$$78. \quad a + b + c = 26; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad 2a + 3b + 4c = 94.$$

$$79. \quad \frac{a}{b} = \frac{4}{5}; \quad a + \frac{4}{a}.b = 3\left(b - \frac{4}{a}.b\right); \quad b + \frac{5}{b}.a = 4\left(a - \frac{5}{b}.a\right).$$

En résolvant le problème au moyen des deux premières équations Nuñez trouve

$$a = 7\frac{3}{11}; \quad b = 9\frac{1}{11}.$$

Il constate ensuite que la solution vérifie la 3^e équation; donc le problème est possible. En guise de discussion il montre que la 3^e condition ne peut plus se donner tout à fait arbitrairement.

$$80. \quad a + b + c = 26; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad 3a + 5b = 2c.$$

Nuñez pose

$$b = 2x, \quad \text{d'où } ac = 4x^2, \quad \text{et } a + c = 36 - 2x.$$

(4) F.^o 184 v.^o. Beaucoup d'autres problèmes de Nuñez lui sont encore empruntés. Sans les nommer tous, nous en indiquerons cependant plus loin quelques uns où la comparaison des solutions offre de l'intérêt.

Puis il détermine a et c en fonction de x par une équation du 2^e degré. Cet artifice pour trouver deux nombres dont il connaît la somme et le produit est chez lui d'un usage courant.

$$81. \quad a + b + c = 12; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad a^2 + b^2 + c^2 = 96.$$

Nous reviendrons à cet exercice.

$$82. \quad a + b = ab; \quad a^2 + b^2 + a + b = 90.$$

L'auteur pose $a + b = x$, d'où il déduit sans peine

$$x^2 - x = 90.$$

$$83. \quad a + b + c + d = 60; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad a + b = 6; \quad c + d = 54.$$

$$84. \quad a + b + c + d = 80; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad b + c = 24; \quad a + d = 56.$$

$$85. \quad a - b = 4; \quad a^2 + b^2 = 80.$$

$$86. \quad a + b + c + d = 80; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad (a + b)(c + d) = 576.$$

$$87. \quad \frac{a}{b} = \frac{7}{4}; \quad 9 - a = 8 - b.$$

Nous reviendrons à cet exercice.

$$88. \quad a + \sqrt{b} = b - \sqrt{b} + 1; \quad b + \sqrt{a} = a - \sqrt{a} + 10.$$

$$89. \quad \frac{20}{a} = a + 4.$$

$$90. \quad a + b + c = 14; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad abc = 64.$$

$$91. \quad a + b + c = 10; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad ab + ac + bc = 30.$$

Méthode analogue à celle du N^o 81.

$$92. \quad a + b + c = 10; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Cardan, dit Nuñez ⁽¹⁾, propose le même exercice mais sur le nombre 14. Il s'y trompe dans le calcul des radicaux. Il s'agit bien entendu chez Cardan d'une simple faute de plume. Mieux que personne l'algébriste italien connaissait le 10^e livre d'Euclide et le calcul des radicaux. C'était au xvi^e siècle la branche la plus relevée de la science. «Obscuritatem habet singularem», disait Gosselin ⁽²⁾.

$$93. \quad ab + (a - b)^2 : a^2 + b^2 = 20.$$

$$94. \quad (a - b)(a^2 - b^2) = 10; \quad (a + b)(a^2 + b^2) = 20.$$

Exercice emprunté au chapitre 34 du *De Arte Magna* de Cardan ⁽³⁾, qui y expose une méthode de solution appelée par lui «Regula medii».

$$95. \quad \frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad ac = 5; \quad bd = 15.$$

$$96. \quad \frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad ab = 5; \quad cd = 10.$$

$$97. \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad a^2 + b^2 = c^2; \quad ab = 10.$$

$$98. \quad a + b = 12; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{10}.$$

$$99. \quad ab = 12; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{2}.$$

$$100. \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad abcd = 81; \quad ab = 6.$$

$$101. \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad abcd = 100; \quad a + d = 7.$$

(1) F.^o 203 r.^o et v.^o. C'est effectivement l'exercice n^o 80 du chap. 66 de la *Practica Arithmeticae* (*Opera omnia*, t. 4, pp. 159-160). Nuñez emprunte beaucoup des exercices de son chapitre 5, à ce chapitre de Cardan, mais en changeant parfois les données numériques. Il est souvent du plus haut intérêt de comparer les solutions des deux grands algébristes.

(2) *De Arte magna*, lib. 2, cap. 10, f.^o 47 v.^o.

(3) *Opera omnia*, t. 4, p. 280. Voir sur ce sujet: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra...* di D. Pietro Cossali, t. 2, Parme, 1799, cap. 1, pp. 3-4.

$$102. \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad a + b + c + d = 13; \quad (a + b)(c + d) = 36.$$

$$103. \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad a + b + c + d = 15; \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 85.$$

$$104. \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad ab = c; \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

$$105. \quad a + b + c = 10; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad ac = 3ab.$$

$$106. \quad a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c = 12; \quad b + \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}c = 15; \\ c + \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}b = 20.$$

Exercice proposé dans la *Summa* de Paciolo ⁽¹⁾, où il est donné sans développement de la solution.

$$107. \quad a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c = 12; \quad b + \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}c = 15; \\ c + \frac{1}{6}a + \frac{1}{8}b = 20.$$

$$108. \quad a + \frac{1}{2}(b + c) = 90; \quad b + \frac{1}{2}(a + c) = 84; \\ c + \frac{1}{4}(a + b) + 6 = 87.$$

Emprunté à Paciolo qui le résout par plusieurs inconnues ⁽²⁾. Nuñez critique la méthode suivant son habitude ⁽³⁾.

$$109. \quad a + 10 = 2(b + c); \quad b + 10 = 3(a + c); \quad c + 10 = 4(a + b).$$

Emprunté à Paciolo ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Dist. 9, tract. 9, n° 37, f.° 193 v.°

⁽²⁾ *Summa*, Dist. 9, tract. 9, n° 26, ff.° 191 v.°-192 r.°

⁽³⁾ F.° 221 r.°

⁽⁴⁾ *Summa*, Dist. 9, tract. 9, n° 28, f.° 192 r.° et v.°. Paciolo y représente successivement les inconnues par la même notation l. co. sans employer plusieurs lettres différentes.

«Fray Lucas pone este caso en los mismos numeros pero haze nueva posicion (*c. à d.* une 2^e inconnue) y quesimos monstrar mas facil uso de las reglas de la cosa.» ⁽¹⁾

C'est toujours la même chose.

$$110. \quad a + \frac{1}{3}(b+c) + 4 = 100; \quad b + 60 = 2(a+c-60) - 4;$$

$$c + \frac{1}{4}(a+b) + 5 = 3 \left[a+b - \frac{1}{4}(a+b) - 5 \right] - 5.$$

Emprunté à Paciolo ⁽²⁾.

Solution très intéressante car elle conduit Paciolo à l'équation

$$x + 79 = 0 \quad \text{d'où } x = -79.$$

Núñez en prend occasion pour s'élever violemment contre les quantités négatives: «La verdad es, dit-il, que el caso es imposible; porque imposible es, que numero y cosas sean yguales a cifra, y que 1.co. sea yguual a m.79. Y si entendio que m.79. es aun menos que nihil, a que llaman debito, esto es mera vanidad, y pura contradition.» ⁽³⁾

Pour faire plus ample connaissance avec les méthodes de Núñez, apprécier son ingéniosité et son adresse, il convient d'examiner en détail la solution de quelques uns de ces exercices; ils donneront l'idée des autres. On le remarquera, ils ne sont pas choisis parmi les plus difficiles.

Exercice 71. ⁽⁴⁾

Chercher deux nombres dont le produit fasse 10 et la somme des carrés 30.

Núñez résout la question de trois manières. Il compare ensuite les résultats trouvés et les discute, ce qui ne lui cause pas un mince embarras. Je résume, mais en gardant cependant, dans chaque solution assez d'intermédiaires pour lui conserver son caractère propre.

1^e Solution. Soit x le plus petit nombre; $\frac{10}{x}$ sera le plus

(1) F.^o 221, v.^o

(2) *Summa*, Dist. 9, tract. 9, n.^o 29, f.^o 192 v.^o

(3) F.^o 224 r.^o

(4) Ff.^o 179 v.^o 181 r.^o

grand et l'on aura :

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = 30; \quad x^4 + 100 = 30x^2; \quad x^2 = 15 \pm \sqrt{125}.$$

Donc $15 - \sqrt{125}$ est le carré du plus petit nombre et $15 + \sqrt{125}$ le carré du plus grand.

Par conséquent les deux nombres sont $\sqrt{15 - \sqrt{125}}$ et $\sqrt{15 + \sqrt{125}}$.

2^e Solution. Nuñez, avons-nous dit, considère la solution $x=0$, comme une absurdité. Dans son souci de la rigueur il se croit donc obligé de démontrer au préalable que cette hypothèse ne se vérifiera pas. Pour cela, dans le cas actuel, il prouve que les deux nombres sont certainement inégaux. Car s'ils étaient égaux, dit-il, chacun des deux vaudrait $\sqrt{10}$; la somme de leurs carrés vaudrait donc 20 et non pas 30 contrairement à l'hypothèse.

Ceci établi, il est maintenant permis de représenter les carrés des deux nombres respectivement par $15 - x$ et $15 + x$. Les nombres eux-mêmes seront alors $\sqrt{15 - x}$ et $\sqrt{15 + x}$. On a donc :

$$\sqrt{15 - x}\sqrt{15 + x} = 10; \quad 225 - x^2 = 100; \quad x^2 = 125; \quad x = \sqrt{125}.$$

Les carrés des deux nombres sont donc $15 - \sqrt{125}$ et $15 + \sqrt{125}$; et par conséquent les deux nombres eux-mêmes sont $\sqrt{15 - \sqrt{125}}$ et $\sqrt{15 + \sqrt{125}}$.

3^e Solution. Euclide a démontré dans la proposition 5 du livre 2 des *Eléments* que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Par conséquent le carré de la somme des deux nombres donnés vaut 50 et la somme elle-même $\sqrt{50}$. Ceci fait, Nuñez prouve de nouveau que les nombres proposés sont certainement inégaux. On peut donc les représenter respectivement

par $\frac{1}{2}\sqrt{50} - x$ et $\frac{1}{2}\sqrt{50} + x$, ou $\sqrt{12\frac{1}{2}} - x$ et $\sqrt{12\frac{1}{2}} + x$.

D'où

$$12\frac{1}{2} - x^2 = 10; \quad x^2 = 2\frac{1}{2}; \quad x = \sqrt{2\frac{1}{2}}.$$

Les deux nombres sont donc $\sqrt{12\frac{1}{2}} - \sqrt{2\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

Que la solution du problème soit donnée en racines universelles ($\sqrt{15 - \sqrt{125}}$ et $\sqrt{15 + \sqrt{125}}$) ou en racines liées ($\sqrt{12\frac{1}{2}} - \sqrt{2\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{2\frac{1}{2}}$), dit ici en substance Nuñez en guise de discussion, peu importe; l'une et l'autre de ces formes fournit une solution exacte du problème. Il est aisé de vous en assurer, car dans chacune de ces solutions, la somme des carrés des nombres trouvés vaut 30 et leur produit vaut 20.

Puis vient cette remarque intéressante ⁽¹⁾:

Pour prouver l'équivalence des solutions vous raisonnez mal en disant

$$\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{2\frac{1}{2}} = \sqrt{15 + \sqrt{125}}$$

car si j'élève les deux membres au carré, chacun d'eux me donne $15 + \sqrt{125}$. De l'égalité des carrés vous n'avez pas le droit de conclure à l'égalité des racines. Je vous l'ai expliqué ci-dessus ⁽²⁾ sur l'exemple $\sqrt{9x^4 + 16x^2 - 24x^3}$. Cette expression représente indifféremment $3x^2 - 4x$ ou $4x - 3x^2$. Cependant vous n'avez aucun droit d'en conclure

$$3x^2 - 4x = 4x - 3x^2.$$

Nuñez n'admettant pas les quantités négatives, cette existence incontestable de la double racine carrée des polynômes prend pour lui le caractère du plus inextricable des paradoxes. Il faut lui céder ici la plume et l'écouter lui-même ⁽³⁾: «Y en esta parte, dit-il, notaremos una cosa muy digna de se saber y que pero es muy difícil, y muy estraña a nuestro entendimiento, por el poco exercicio que tenemos en las subtilizas de Arithmetica; y esto es, que dos quantidades son yguales, mas la raiz de la una no es ygual a la raiz de la otra».

(1) F.^o 181 r.^o

(2) Au chap. 1 de la 3^e partie.

(3) F.^o 134 v.^o

En pratique on voit cependant parfois pourquoi cela a lieu et ce qu'il convient de faire. Ainsi soit

$$9x^4 + 16x^2 - 24x^3 = 225.$$

Prenez d'abord

$$(3x^2 - 4x)^2 = 225$$

d'où

$$3x^2 - 4x = 15 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

Cette solution convient.

Prenez au contraire

$$(4x - 3x^2)^2 = 225$$

vous obtiendrez

$$4x - 3x^2 = 15$$

ce qui est une équation impossible. Ses racines sont en effet imaginaires. Les deux expressions ne sont donc pas égales. La première seule est admissible, la deuxième doit être rejetée. Mais tout ceci est dit dans un style obscur, diffus, dont Nuñez, toujours si clair, n'est pas coutumier. En réalité il n'a pas vu la solution de la difficulté.

Exercice 81.

Partager 12 en trois parties proportionnelles dont la somme des carrés fasse 96.

On peut dit Nuñez trouver une règle générale pour résoudre toutes les questions de ce genre. Voici pas à pas en notations modernes son raisonnement ⁽¹⁾. Soit donné

$$x + y + z = a \tag{1}$$

$$xz = y^2 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2. \tag{3}$$

Elevons (1) au carré

$$(x + y + z) = a^2 \tag{4}$$

(1) F.^o 191 v.^o

retranchons (3) de (4)

$$2xy + 2xz + 2yz = a^2 - b^2$$

ou, à cause de (2)

$$2xy + 2y^2 + 2yz = a^2 - b^2$$

ou, à cause de (1)

$$2ay = a^2 - b^2$$

d'où

$$y = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Connaissant y , on connaît $x + z$ et xz . On détermine x et z par une équation du 2^e degré.

Nous sommes au xvi^e siècle, ne l'oublions pas, et ce raisonnement est donné comme général et s'appliquant à tous les cas. Je mets au défi de trouver un sujet analogue traité avec plus d'élégance par Cardan ou par Stifel!

Exercice 87 ⁽¹⁾.

Chercher deux nombres qui soient entre eux dans le rapport de $\frac{7}{4}$, et tels qu'en retranchant le plus grand de 9 et le plus petit de 8 les deux restes soient égaux.

Soit $7x$ le plus grand nombre et $4x$ le plus petit. L'équation du problème est

$$9 - 7x = 8 - 4x \quad \text{d'où } x = \frac{1}{3}.$$

Les deux nombres demandés sont donc $\frac{7}{3}$ et $\frac{4}{3}$.

Pour que le problème soit possible, dit Nuñez, le rapport des nombres dont on soustrait, doit être inférieur au rapport des nombres cherchés. Admirons le style de la démonstration.

Soient a et b les nombres cherchés $a > b$; c et d les deux nombres dont on soustrait $c > d$.

«Los dos numeros que buscamos sean a y b , el mayor a , y

(1) Ff.° 196 r.°-197 v.°

el menor b ; y los dos números de los cuales nos avemos de sacar sean c y d , el mayor c , y el menor d .

«Y sacando a de c sea lo que queda e ; y sacando b de d , sea lo que queda f ; y porque los números que quedan han de ser yguales, serán luego yguales e y f .

$$(\text{Posons } c - a = e, \quad d - b = f; \quad \text{on a } e = f)$$

«Y porque a es mayor que b , menor proporcion aura luego de e para a que de f para b , por la proposicion 10 del 5 lib. de Euclid.

$$(a > b, \quad \text{donne } \frac{e}{a} < \frac{f}{b})$$

«Y por la conjunta, demonstrada por Campano⁽¹⁾ en el mismo 5 libro, menor sera la proporcion de e y a juntas para a , que de f y b juntas para b .

$$\left(\frac{e + a}{a} < \frac{b + f}{b} \right)$$

«Y por que c consta de a y e , y d consta de b y f , menor sera tambien la proporcion de c para a que de d para b .

$$\left(\text{or, } c = e + a, \quad d = f + b; \quad \text{done } \frac{c}{a} < \frac{d}{b} \right)$$

«Y permutando, menor sera la proporcion de c para d , que de a para b .

$$\left(\frac{c}{d} < \frac{a}{b} \right)$$

«Por esta demonstracion queda claro que los dos números de que avemos de sacar otros que tengan una cierta propor-

(1) Sur la traduction et le commentaire d'Euclide par Campanus, voir Cantor, *Vorlesungen*, 2^e ed., t. 2, pp. 100-106. L'Euclide de Campanus a été souvent réédité. On trouvera le titre exact de ces éditions avec leur date dans: *Saggio di una bibliografia Euclidea*, par Pietro Ricciardi. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*. 4^a ser., t. 8, Bologne 1887, et 5^e ser., t. 1, Bologne, 1889.

cion, y que los numeros que quedan sean yguales, no pueden tener yqual proporcion o mayor, que la proporcion de los numeros que buscamos para dellos los sacar.»

Ces trois exemples, choisis intentionnellement parmi ceux qui semblent au premier abord les plus simples, montrent combien ce chapitre de Nuñez est intéressant. Pour en trouver d'autres, non moins curieux, on n'aurait que l'embarras du choix.

VI

Pour terminer l'analyse du *Libro de Algebra*, reste à parcourir le chapitre 7, contenant l'application de l'algèbre à la géométrie. Les exercices de ce chapitre, au nombre de 77, se classent en six groupes.

1° Le carré (1-14).

2° Les rectangles non carrés (15-31).

3° Les triangles (32-64).

4° Les rombes et les romboïdes, c'est à-dire, les losanges et les simples parallélogrammes (65-69).

5° Les trapèzes. Sous ce nom il faut entendre les simples quadrilatères, sans en exclure les trapèzes au sens actuel du mot (70-74).

6° Les pentagones (75-77).

Le troisième de ces groupes est, à la fois, de beaucoup le meilleur et le plus intéressant. Nuñez se propose d'y reprendre le second livre du traité *De Triangulis* de Regiomontan⁽¹⁾, de le compléter et de le perfectionner. Il y réussit à souhait. Voici les énoncés des problèmes résolus. Dans l'auteur, cela va de soi, ils sont exprimés au long, en langage courant, mais pour abréger je désigne :

Par A, B, C , les trois angles; a, b, c , les côtés opposés; p , le demi périmètre; s , la surface; r , le rayon du cercle inscrit; R celui du cercle circonscrit; h la hauteur abaissée de l'angle A .

De plus k et l désignent les deux segments déterminés sur a par le pied de la hauteur, adjacents respectivement aux côtés b et c ; k' et l' , désignent de même les segments analogues déterminés sur a , par le point de contact du cercle inscrit.

Les numéros d'ordre qui précèdent les énoncés, sont ceux

(1) *Doctissimi viri et mathematicarum disciplinarum eximii professoris Joannis de Regio Monte de triangulis omnimodis libri quinque...* Norimbergae. In aedibus Io. Petri. Anno Christi M.D.XXXIII.

des exercices dans l'original. Nuñez ne fait aucun usage des tables trigonométriques.

32. Suivant que $a^2 < b^2 + c^2$ on a $A < 1$ droit.

33. On donne a, b, c ; on demande h, k et l .

Longue solution où l'auteur n'a cependant pas de difficultés extraordinaires à vaincre. Mais il croit devoir distinguer plusieurs cas suivant la nature du triangle. Il donne ensuite, pour chacun d'eux, par plusieurs procédés différents, le calcul des segments déterminés sur les côtés par les pieds des hauteurs. Ces segments évalués, la longueur des hauteurs se trouve par le théorème du carré de l'hypoténuse.

34. On donne a, b, c ; on demande s . *Rép.* $s = \frac{1}{2} ah$.

35. On donne $A = 90^\circ, b$ et c ; ou bien $A = 90^\circ, a$ et c ; on demande s .

36. On donne $A = 90^\circ, 2p$, et la condition $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$; on demande a, b, c .

37. On donne a, b, c ; on demande s . *Rép.* $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Exercice très remarquable; nous y reviendrons.

38. On donne p et s ; on demande a, b, c . Problème indéterminé.

39. On donne $A = 90^\circ, p$ et s ; on demande a, b et c . *Rép.*

$$a = \frac{2p^2 - 2s}{2p}.$$

40. On donne $A = B = C$ et s ; on demande a et h .

41. On donne $A = B = C$ et h ; on demande a et s .

42. On donne h et $a:b:c$; on demande a, b et c .

43. On donne s et $a:b:c$; on demande a, b et c .

44. On donne k, l et $\frac{b}{c}$; on demande b, c, h et s (1).

45. On donne k, l , et $b+c$; on demande b, c, h et s .

46. On donne a, h et $\frac{b}{c}$; on demande b, c, k et l .

Problème dont Regiomontan donne déjà une solution par l'algèbre (2). Sa méthode diffère de celle de Nuñez. Les solu-

(1) Le même problème est repris plus loin sous le N° 50. Regiomontan traite aussi deux fois le problème au livre II *De Triangulis*, N° 13, pp. 51-52 et N° 21, p. 55.

(2) *De Triangulis*, Lib. 2, N° 12, p. 51. La solution de cet exercice est fort exactement donnée dans les *Vorlesungen* de Cantor, 2^e éd., t. 2, p. 269.

tions des deux auteurs sont intéressantes à comparer et Nuñez lui-même nous invite à le faire. A la fin de l'exercice précédent il dit à ce propos ⁽¹⁾:

«Quien sabe por Algebra, sabe científicamente. Principalmente que vemos algunas vezes, no poder un gran Mathematico (entendez Regiomontan) resolver una question por medios geometricos, y resolver la por Algebra, siendo la misma Algebra sacada de la Geometria, que es cosa de admiracion. Y tal es la siguiente question (c. à d. le N° 16), la qual es semejante a la 12, del segundo libro de los triangulos de Iuan de Montereio, el qual confiesa, que no la pudo resolver per medios geometricos, que era su instituto en aquel libro, socorriose por esa causa a esta subtilissima arte de Algebra.»

47. On donne a , h et $b+c$; on demande b et c .

Au cours de la solution, Nuñez critique, cette fois, la méthode de Regiomontan.

48. On donne k , l et $b-c$; on demande a , b et c .

49. On donne b , c et $\frac{k}{l}$; on demande a , h et s .

50. On donne k , l et $\frac{b}{c}$; on demande a , b , c , h et s .

51. On donne $k-l$, $b-c$ et h ; on demande k , l , a , b et c .

C'est, on le sait, un deuxième exercice de son livre 2, *De Triangulis* ⁽²⁾, dont Regiomontan donne la solution par l'algèbre. Nuñez le fait de nouveau remarquer ⁽³⁾:

«Esta es la proposicion 23, dit-il, del segundo libro de los triangulos de Iuan de Montereio, la qual el tambien resuelve por Algebra, y con menos obra. Pero presupone otra proposicion, que se demuestra por el segundo libro de Euclides. Y por esta causa para mas facilidad, usando de menos principios, hize la posicion otra arte.»

Réflexion dont il serait intéressant de discuter l'exactitude. Mais il faut me limiter. Aussi bien toutes les démonstrations de Nuñez mériteraient-elles d'être comparées à celles de Regiomontan.

52. On donne b , c et s ; on demande a .

53. On donne a , b et c ; on demande r . $Rip. r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

(1) F.° 270 v.°

(2) N° 23, pp. 55-56. Voir la solution de Regiomontan dans les *Vorlesungen* de Cantor. 2° ed., t. 2, p. 269-270.

(3) F.° 271 v.°

54. On donne a , b et c ; on demande R .

Au cours de la démonstration Nuñez donne la formule $2R = \frac{bc}{h}$ comme due à Regiomontan ⁽¹⁾. On la trouve effectivement dans la proposition 24 du livre 2 *De Triangulis* ⁽²⁾.

55. On donne R et $a:b:c$; on demande a , b et c .

56. On donne r et $a:b:c$; on demande a , b et c .

57. On donne a , b et c ; on demande k' , l' , et la distance du centre du cercle inscrit aux trois sommets du triangle.

58. On donne r , k' et l' ; on demande b et c .

59. On donne a , b et c , et les segments déterminés sur a , par le pied D d'une droite AD issue de A; on demande la longueur de AD.

60. Calculer le côté du triangle équilatéral en fonction du rayon du cercle circonscrit.

61. Calculer le côté du carré inscrit dans un triangle équilatéral.

62. Calculer le côté du carré inscrit dans un triangle quelconque.

63. On donne a , b et c ; on demande de déterminer le centre de gravité du triangle et de calculer la distance de ce centre de gravité aux trois sommets.

Démonstration intéressante où Nuñez fait preuve d'une grande connaissance des oeuvres d'Archimède.

64. Etant donnés a , b et s , quelles conditions doivent remplir les autres éléments du triangle, pour que c puisse admettre plusieurs valeurs? *Rép.* Les angles compris entre a et b doivent être supplémentaires. Le résultat est bien simple, mais contrairement à son habitude Nuñez y arrive par une démonstration embrouillée.

Que ne puis-je ici comparer en détail Nuñez et Regiomontan? Ce serait malheureusement allonger mon travail hors de toute mesure. Encore une fois, il faut me limiter, et malgré son intérêt, je renonce à cette étude.

Examinons donc une dernière question et je termine.

Le rôle singulièrement important joué dans la théorie des triangles de Nuñez par la formule

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(1) F.º 276 v.º

(2) P. 56. Voir cette démonstration dans les *Vorlesungen* de Cantor, 2º ed., t. 2, p. 268.

frappe de prime abord. Elle revient à tout propos, à l'égal d'un théorème d'Euclide.

La formule est de Héron ⁽¹⁾. Tout le monde le sait aujourd'hui; mais en 1567 il n'en était pas de même, car Héron était alors fort peu connu. En réalité Nuñez n'emprunte pas la formule à Héron; elle était alors tombée déjà, dit-il lui-même ⁽²⁾, dans le domaine public. Quant à la démonstration de la formule on la doit, d'après lui, à Paciolo ⁽³⁾. Malheureusement, ajoute-t-il, frère Luc est si obscur que pour plusieurs il n'y a rien à comprendre à sa démonstration ⁽⁴⁾. Il va donc tâcher d'être à la fois plus rigoureux et plus clair.

Voici comment il s'y prend :

Je résume, car la démonstration de Nuñez ne compte pas moins de 21 pages d'un texte des plus serrés et où les alinéas sont rares ⁽⁵⁾. Pour la suivre il faut, la plume à la main, traduire au fur et à mesure le raisonnement en notations modernes. Mais la chaîne de ce raisonnement est si solide, son agencement si curieux, qu'à en examiner un à un tous les anneaux, on ne regrette vraiment ni son temps, ni sa peine.

Comme préliminaires, nous avons la démonstration de trois «fondements»; nous dirions aujourd'hui trois lemmes. Au premier abord on n'en aperçoit pas l'utilité, mais ils ne sont pas explicitement dans Euclide et l'auteur va les invoquer au cours des raisonnements. Le souci de la rigueur exige donc leur démonstration préalable. Les voici en langage moderne.

Lemme I. Etant donnés deux nombres a et b , on a

$$\frac{a^2}{ab} = \frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b}.$$

Lemme II. Etant donné un triangle ABC, si pour un point D

(1) *Heronis Alexandrini quae supersunt opera omnia*, edid. Wilhelm Schmidt et Hermann Schöne, T. 3, Leipzig, Teubner, 1903, pp. 18-25.

(2) «Esta arte de medir hallo en todos los libros que tratan de midicion.» F.º 249 v.º

(3) Il la donne en effet dans la *Summa Geometriae*, Dist. 1, f.º 11 r.º Voir sur ce sujet Cantor. *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2^e ed., t. 2, p. 330.

(4) «La demonstracion trae Fray Lucas de Burgo. pero tan obscuramente que no se podra entender de todos.» Ff.º 249 v.º-250 r.º

(5) Ff.º 249 r.º-250 r.º

de la base BC, on a la relation

$$CD^2 - BD^2 = CA^2 - BA^2$$

la droite AD est perpendiculaire sur BC.

La démonstration se fait par l'absurde.

Nous dirions aujourd'hui plus simplement : Le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante, est une perpendiculaire à la droite qui joint les deux points. Mais un énoncé de cette forme est absolument étranger au style du xvi^e siècle.

Lemme III. Dans un produit de trois facteurs on peut intervertir l'ordre des facteurs.

Ces lemmes prennent huit pages; puis vient la solution de l'exercice.

Pour la donner en langage moderne, soient, comme précédemment, A, B, C, les trois sommets du triangle; a, b, c , les longueurs des trois côtés; p , le demi-périmètre; s la surface; I et r , le centre et le rayon du cercle inscrit; A', B', C' les points de contact du cercle inscrit respectivement avec a, b, c .

Enfin I_a, r_a, A'', B'', C'' , sont cinq éléments qui, de fait, sont le centre et le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle A, ainsi que les points de contact de ce cercle, avec les côtés a, b et c ; mais, il importe de le remarquer, l'auteur ne les définit pas comme tels. Nous donnerons la définition adoptée par Nuñez au moment voulu.

Ceci posé la démonstration se divise en quatre parties.

1^e partie. La surface d'un triangle peut s'exprimer par

$$s = pr.$$

Nous écririons au jourd'hui en trois lignes

$$s = IBC + ICA + IAB$$

$$IBC = \frac{1}{2} r \cdot a; \quad ICA = \frac{1}{2} r \cdot b; \quad IAB = \frac{1}{2} r \cdot c$$

$$s = \frac{1}{2} r (a + b + c) = pr.$$

C'est pas à pas le raisonnement de Nuñez. Mais donné sans aucune notation algébrique, à grand renfort d'énoncés de théorèmes d'Euclide, il devient d'une longueur invraisemblable.

Arrivé au bout, l'auteur sent le besoin de reprendre haleine : «Y esto, dit-il, après avoir établi la formule, se garde en la memoria para su tiempo.» (1)

Remarquons le cependant en passant, l'expression $s = pr$ n'était pas neuve. Les Grecs l'avaient connue et dès le début du xv^e siècle elle était partout, chez les Latins, d'un usage courant. Pour ne citer que le *De Triangulis* de Regiomontan, Nuñez pouvait la lire au cours de la proposition 15 du livre 2.

2^e partie. On a

$$AB' = AC' = p - a; \quad BC' = BA' = p - b; \quad CA' = CB' = p - c.$$

Ici vient la définition des points A'' , B'' , C'' . On les obtient en portant sur BC la longueur

$$BA'' = CA'$$

puis respectivement sur AB et AC prolongés

$$BC'' = BA''; \quad CB'' = CA''.$$

On démontre alors que

$$BC'' = BA'' = p - c; \quad CB'' = CA'' = p - b.$$

$$AB'' = AC'' = p.$$

3^e partie. Les triangles I_aBC'' , IBC' sont équiangles; ainsi que les triangles I_aAC'' , IAC' .

Nuñez sent ici le besoin de s'excuser. Sa démonstration se fait, dit-il, «por un prolixo discurso!» (2).

La difficulté provient de la manière dont il a défini les points A'' , B'' , C'' . Il doit démontrer maintenant qu'en les joignant au centre I_a du cercle ex-inscrit, il forme des triangles rectangles. Voici le moyen détourné par lequel il y réussit.

En C'' il élève une perpendiculaire au côté AC'' , et nomme I_a le point d'intersection de cette perpendiculaire avec la bissectrice de l'angle A . (Jusqu'ici I_a n'était pas encore défini). Il joint I_aB'' et forme ainsi deux triangles I_aAB'' , I_aAC'' , qui ont

(1) F.^o 253 v.^o

(2) F.^o 255 r.^o

un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun : d'où il conclut que $I_a B''$ est perpendiculaire à AB'' .

Il joint maintenant $I_a A''$.

Les triangles rectangles $I_a B C''$, $I_a C B''$ lui donnent :

$$\overline{I_a B}^2 - \overline{BC''}^2 = \overline{I_a C''}^2 = \overline{I_a B''}^2 = \overline{IC''}^2 - \overline{CB''}^2$$

d'où

$$\overline{I_a B}^2 - \overline{BA''}^2 = \overline{I_a C}^2 - \overline{CA''}^2$$

$$\overline{I_a B}^2 - \overline{I_a C}^2 = \overline{BA''}^2 - \overline{CA''}^2.$$

Il en conclut enfin, par son lemme 2, que $I_a A''$ est perpendiculaire à BC .

Ceci obtenu, il prouve aisément que $I_a B$ et $I_a C$ sont les bissectrices extérieures des angles B et C . Les similitudes des triangles se démontrent maintenant sans difficulté.

4^e partie. Après tous ces préliminaires, il s'agit de les utiliser enfin, pour exprimer r en fonction des côtés dans la formule

$$s = pr$$

« confiée naguère, on se le rappelle, à notre mémoire ».

Ici Nuñez devient de plus en plus intéressant. Il écrit d'abord

$$s^2 = p^2 r^2.$$

Puis les triangles semblables $I_a B C'$, IBC' lui donnent

$$\frac{r_a}{p-c} = \frac{p-b}{r}$$

formule qu'il transforme successivement en

$$(p-b)(p-c) = rr_a$$

$$\frac{r^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{r^2}{rr_a} = \frac{r}{r_a}.$$

Les triangles semblables $I_a A C''$, IAC'' lui donnent ensuite

$$\frac{p-a}{p} = \frac{r}{r_a}.$$

Il en tire

$$\frac{r^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{p-a}{p}$$

$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$$

$$p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \quad \text{et enfin} \quad s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dans ces transformations il est fait usage des lemmes 1 et 3.

Tout ceci est exprimé à la manière d'Euclide, en langage courant, sans notation algébrique, sans omettre le moindre intermédiaire, en énonçant au long à chaque transformation le théorème justificatif. Nuñez en croyait l'indication explicite exigée par la rigueur. C'est le style du *xvi^e* siècle: Il est prolixe, mais quelle puissance d'attention il exige! Quelle pénétration! Quelle vigueur d'intelligence! Car cet interminable raisonnement est conduit du commencement à la fin d'un pas lent et régulier, marchant tout le temps sans cahots, sans heurts, avançant toujours. Oui Nuñez est long, mais il ne se pique pas d'être court. Il voulait rendre rigoureuse et claire l'obscur démonstration de frère Luc de Burgo; donnons en lui acte, car c'est justice, il y a pleinement réussi.

VII

Concluons cette étude.

De Tartaglia, Cardan et Stifel, à Viète, il s'écoule cinquante ans. Bien à tort l'histoire de l'algèbre s'en occupe peu. Pendant tout ce temps, des hommes de talent font progresser lentement, mais sûrement la science. Malheureusement pour eux, la gloire incomparable des maîtres qui les précèdent, celle surtout de Viète qui les suit, empêche d'apercevoir l'éclat de leur mérite, d'apprécier l'importance de leurs services.

C'étaient cependant des travailleurs adroits et consciencieux, disons mieux, des hommes vraiment grands, que Butéon, Gosselin, Peletier, Petri Nuñez!

Sans leur labeur intelligent et tenace, les immortelles découvertes de Viète eussent été impossibles. Pour évoluer la science demande un terrain préparé; plus on étudie l'histoire, plus on s'en convainc. Elle avance et marche; elle ne court pas en se précipitant en avant par sauts et par bonds.

Viète a donc eu des précurseurs, Nuñez fut l'un des princi-

paux. Aucun contemporain ne le surpasse en rigueur. Maurolyco seul l'atteint par l'abstraction et la généralité du raisonnement, par l'élégance et l'heureux choix de l'algorithme.

Reconnaissons le cependant, cette grande justesse d'esprit en a parfois quelque peu diminué l'envergure. Nuñez n'aperçut pas, par exemple, l'avenir réservé aux solutions négatives des équations, dont l'utilité était déjà si bien entrevue par d'autres, notamment par Luc de Burgo.

N'importe malgré la très légère ombre qui plane, peut être, de ce fait, sur sa mémoire, Nuñez n'en est pas moins un des algébristes les plus éminents du xvi^e siècle. Il fallait, disait Gosselin «jurer par un pareil maître» (1). Parmi les grands mathématiciens qui séparent Stifel et Cardan, de Viète, il brille au tout premier rang. C'est l'une des gloires du Portugal. Puisse cette étude sur le *Libro de Algebra* avoir pu contribuer à le montrer!

Bruzelles, Collège Saint Michel, mai-juin 1908.

(1) «In ejus verba juravi», dit-il, dans la dédicace, après avoir nommé Nuñez dans la liste des auteurs dont il s'est servi. *De Arte Magna*. f.^o aiiiij v.^o

INDEX

| | Pag. |
|--|------|
| HATON DE LA GOUPILLIÈRE: <i>Surfaces nautiloïdes</i> | |
| Introduction | 5 |

PREMIERE PARTIE

Surfaces à front générateur

| | |
|--|----|
| I — Préliminaires..... | 6 |
| II — Les quatre types simples..... | 10 |
| III — Nautile à front méridien..... | 15 |
| IV — Mouvement nautiloïde | 25 |
| V — Equation des surfaces nautiloïdes..... | 30 |
| VI — Plan tangent..... | 36 |
| VII — Nautile à front normal..... | 42 |

SECONDE PARTIE

Volume, centre de gravité, moment d'inertie

| | |
|---|-----|
| VIII — Formules fondamentales | 69 |
| IX — Volume..... | 74 |
| X — Centres de gravité..... | 82 |
| XI — Lieux géométriques du centre de gravité..... | 86 |
| XII — Moments d'inertie..... | 93 |
| XIII — Applications aux nautiloïdes..... | 101 |
| XIV — Front oblique | 104 |
| XV — Coordonnées intrinsèques | 110 |

TROISIEME PARTIE

Surfaces sphérales

| | |
|--|-----|
| XVI — Surfaces enveloppes..... | 116 |
| XVII — Surfaces sphérales | 120 |
| XVIII — Sphérales réciproques | 126 |
| XIX — Directrice en coordonnées sphériques | 129 |
| XX — Directrice en coordonnées rectangulaires..... | 133 |

| | Pag. |
|--|------|
| XXI — Directrice en coordonnées polaires..... | 139 |
| XXII — Sphéro-nautille..... | 148 |
| XXIII — Cônes circonserits..... | 154 |
| XXIV — Directrice en coordonnées intrinsèques..... | 159 |

QUATRIEME PARTIE

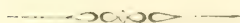
Lignes de courbure, surfaces podaires

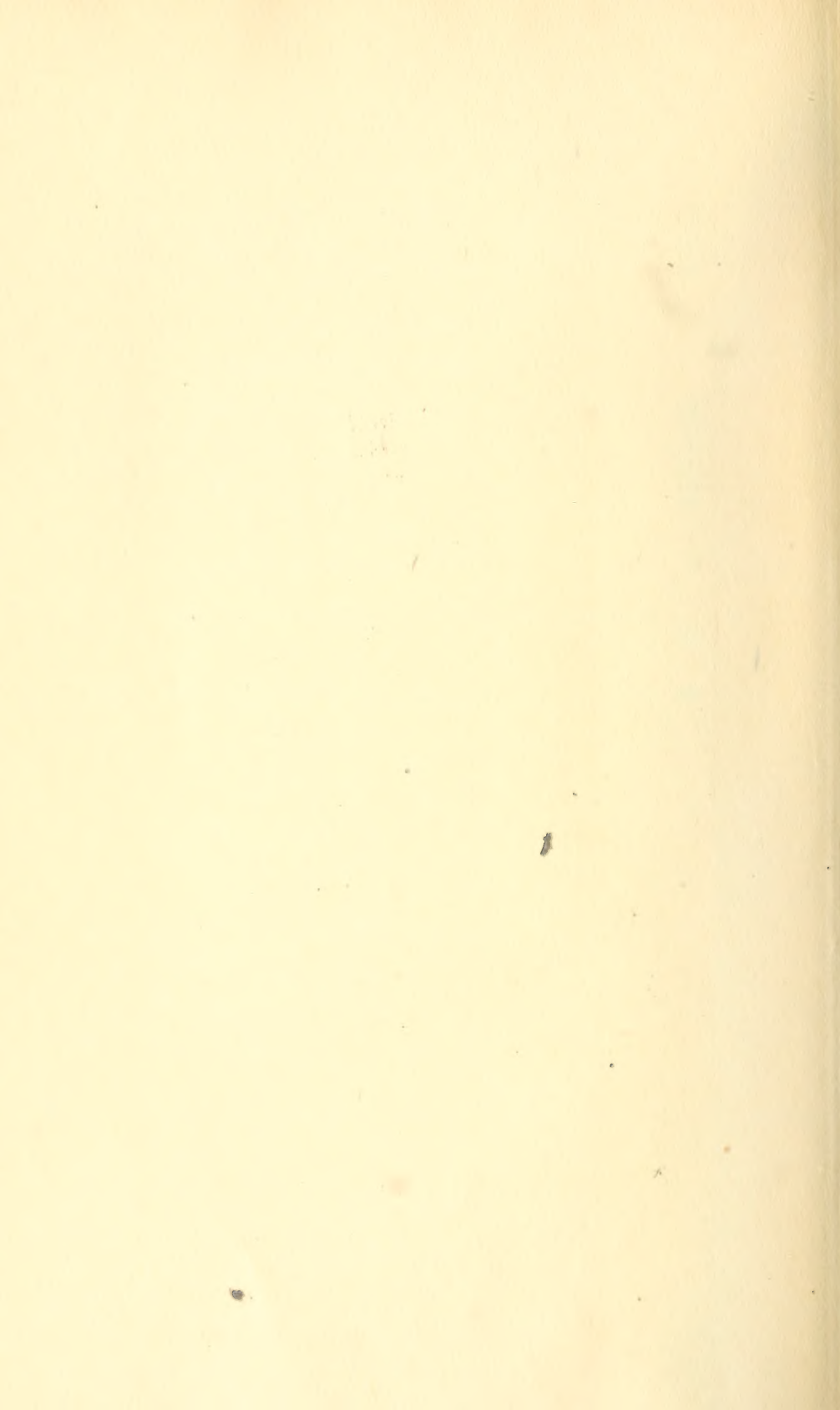
| | |
|---|-----|
| XXV — Lignes de courbure en coordonnées rectangulaires... | 165 |
| XXVI — Lignes de courbure en coordonnées polaires..... | 173 |
| XXVII — Surfaces podaires..... | 188 |
| XXVIII — Surfaces antipodaires..... | 191 |
| XXIX — Surfaces normopodaires..... | 192 |
| XXX — Surfaces céritoïdes..... | 198 |

| | |
|---|----|
| AUGUSTO NOBRE: <i>Mollusques terrestres du Portugal</i> | 47 |
|---|----|


| | |
|--|-----|
| A. A. DA ROCHA PEIXOTO: <i>Survivances du régime communautaire en Portugal</i> | 205 |
|--|-----|

| | |
|---|-----|
| H. BOSMANS S. J.: <i>L'Algèbre de Pedro Nunez</i> | 222 |
|---|-----|





**University of Toronto
Library**

Physical 
Applied Sci.
Serials

**DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET**

STORAGE

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File"
Made by LIBRARY BUREAU

